Введение

Одной из основных задач физики атмосферы и океана является описание циркуляции атмосферы, определяющей погоду и климат обширных регионов. Эта проблема привлекала и продолжает привлекать внимание большого числа исследователей в течение длительного времени, о чем свидетельствуют многочисленные обзоры и монографии. Приведем лишь некоторые из них — это монографии *Педлоски*, 1984; *Бэтчелор*, 1973; *Голицын*, 1973 и обзоры *Петвиашвили*, *Похотелов*, 1989; *Незлин*, 1986; *Незлин*, *Снежкин*, 1990; *Монин*, *Жихарев*, 1990; *Монин*, *Кошляков*, 1979; *Terry*, 2000, а также *Kamenkovich*, *Koshlyakov*, *Monin*, 1986. Несмотря на особое внимание исследователей, проблема остается актуальной.

Обзор посвящен обсуждению результатов исследования зональных течений и синоптических вихрей, планетарных волн или волн Россби. Циркуляция земной атмосферы и океана, усредненная по большим пространственным и временным масштабам, характеризуется синоптическими вихрями в виде волн Россби (циклонов и антициклонов), а также тесно связанными с ними зональными ветрами (течениями). Физическая природа волн Россби обусловлена большими горизонтальными масштабами волн в поле с преобладающей силой Кориолиса при малых числах Россби (иногда это число называется числом Россби) Ro, $\mathrm{Ro} \equiv v/fL \ll 1$, и очень малых числах Экмана Ek, $\mathrm{Ek} \equiv \nu/fL^2 \ll 1$, где v и L — характерная скорость и пространственный масштаб волн в плоскости перпендикулярной оси вращения; f — параметр Кориолиса; ν — кинематическая вязкость. Турбулентное движение, существующее в атмосфере при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = \mathrm{Ro}/\mathrm{Ek} \gg 1$, служит причиной генерации вихрей и зональных течений. Согласно теореме Тейлора–Праудмена движение в таких условиях должно представлять собой совокупность двумерного движения в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и однородного движения вдоль оси вращения. Характерные масштабы синоптического движения, на которых существенно изменение параметра Кориолиса в меридиональном направлении, существенно превышают высоту атмосферы или глубину океана. Это дает возможность описывать синоптическое движение как волны в так называемом приближении β-плоскости.

Такие волны названы в честь американского метеоролога шведского происхождения Карла Густава Россби (*Rossby*, 1939, 1940), получившего в 30–40 гг. прошлого столетия ряд значительных результатов в теории синоптических волн. Волнам Россби соответствует ветвь волн (синоптические или мезомасштабные волны) синоптического масштаба, сравнимого с радиусом Россби в атмосфере или в океане (радиус Россби в атмосфере порядка 2000 км, а в открытом океане порядка 50 км), что существенно превышает высоту атмосферы или глубину океана. В долгоживущих синоптических вихрях (циклонах и антициклонах) происходит захват вещества, которое переносится с вихрями на большие расстояния. Это свойство определяет их важную роль в динамике среднесуточного давления, температуры, скорости ветра и др. В земной атмосфере циклоны и антициклоны имеют характерные пространственные масштабы от сотен до тысяч километров, а время их существования — от нескольких дней до нескольких недель. В приэкваториальной области такие вихревые возмущения двигаются преимущественно в западном направлении, преобразуя энергию, связанную с градиентом температуры в направлении полюс – экватор, в энергию (потенциальную энергию бароклинной атмосферы) тайфунов (см., например, монографию *Педлоски*, 1984).

Как показано в обзорах *Монин*, *Кошляков*, 1979; *Kamenkovich*, *Koshlyakov*, Monin, 1986, в открытом океане поперечный масштаб вихрей порядка 100 км, а характерная скорость 5–6 см/с. Синоптические вихри в земной атмосфере дрейфуют со скоростью порядка 5–10 м/с, сравнимой со скоростью вращения вещества в вихре. Вращение вещества в синоптических вихрях более медленное, чем вращение планеты. Плоским характером движения, а также медленным вращением вихри волн Россби существенно отличаются от мелкомасштабных (по сравнению с высотой атмосферы) смерчей или ядер тайфунов, которым свойственно трехмерное движение и более быстрое вращение, чем вращение планеты. Обсуждение таких вихрей выходит за рамки данного обзора, посвященного крупномасштабным синоптическим структурам, в которых движение можно рассматривать как плоское или почти плоское, квазидвумерное.

Не менее важными элементами циркуляции атмосфер планет, влияющими на погоду наряду с синоптическими вихрями, являются зональные ветры (или зональные течения в океане) — квазистационарные потоки в азимутальном направлении. С существованием сдвиговых зональных ветров в атмосфере или течений в океане связан механизм генерации фронтальных синоптических вихрей. Как показывают метеорологические наблюдения, неустойчивый зональный ветер в атмосфере генерирует так называемые меандры (геометрический орнамент в виде кривой линии с завитками, называемый так по имени очень извилистой реки Меандр в малой Азии) с масштабами от нескольких сотен до тысяч километров. Отсекаемые от зональных ветров меандры трансформируются в циклонические и антициклонические вихри. Генерация меандров, трансформирующихся в циклоны и антициклоны, в поле струйных зональных ветров имеет полную аналогию с генерацией крупномасштабных вихрей в океане, что свидетельствует о единстве механизма образования вихрей. Так, например, отсекаемые от Гольфстрима меандры с характерными масштабами порядка 300–400 км трансформируются в холодные циклонические вихри справа и теплые антициклонические вихри слева от основной струи (см. обзор *Монин*, *Кошляков*, 1979). Генерация меандров и последующее отделение вихрей объясняется как результат развития неустойчивостей типа неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в баротропной атмосфере, либо в потоке со сдвигом скорости по высоте в бароклинной атмосфере.

Волны Россби наблюдаются не только в атмосфере и океанах Земли, но и в атмосферах других планет. Радиус Россби в земной атмосфере сравним с радиусом Земли в отличие от планет гигантов, где радиус Россби значительно меньше радиуса планеты. Так, в атмосфере Юпитера и Сатурна радиус Россби порядка 6000 км, что существенно меньше радиусов этих планет. В атмосферах планет гигантов наблюдается большое число долгоживущих вихрей волн Россби. Самым знаменитым из них является Большое Красное Пятно с характерным масштабом 70 000 км, обнаруженное Р. Гуком и наблюдаемое уже более 300 лет. Другой отличительной чертой больших планет является четко выраженная периодическая в меридиональном направлении структура зональных ветров (см. *Rossby*, 1940, а также статью *Vasavada*, *Showman*, 2005). Амплитудная величина скорости зонального ветра на Юпитере имеет величину порядка 100 м/с, а на Сатурне достигает 200 м/с.

Движение вещества в волнах Россби имеет аналогию с движением ионов в электростатических дрейфовых волнах, что показано, например, в работе (*Horton*, *Hasegawa*, 1994). С дрейфовыми волнами связывают повышенные (аномальные) переносы тепла и частиц поперек магнитного поля в термоядерной плазме, поэтому исследованию этих волн уделяется особое внимание. Аналогия между волнами Россби и дрейфовыми волнами, основанная на аналогии силы Кориолиса во вращающейся среде с силой Лоренца в замагниченной плазме, служит предпосылкой взаимообмена идейными и методическими достижениями. Синоптические вихри и зональные ветры, наблюдаемые в атмосфере, можно рассматривать как модели волновых процессов в замагниченной плазме и наоборот.

Исследованию генерации в атмосферах планет крупномасштабных структур (типа зональных ветров или конвективных ячеек) и их последующей эволюции уделяется все возрастающее внимание как в геофизической гидродинамике, так и в теории замагниченной плазмы. Существуют два подхода к проблеме генерации зональных ветров (течений). Первый подход, развитый F.H. Busse (*Busse*, 1994), а также Yano J., Talagrand O. и Drossart P. (*Yano* et al., 2003), основан на трехмерной термоконвекции. Второй подход, основанный на так называемом двумерном обратном турбулентном каскаде, в котором волновая энергия (энстрофия) нелокально переносится из энергонесущей области мелкомасштабных волн Россби в крупномасштабную область зонального ветра, предложен в работах (Rhines, 1975; *Balk*, *Nazarenko*, *Zakharov*, 1990), а также (*Михайловский*, *Новаковский*, *Онищенко*, 1988). В работах (*Balk*, *Nazarenko*, *Zakharov*, 1990), а также (*Михайловский*, *Новаковский*, *Онищенко*, 1988) показано, что взаимодействие мелкомасштабных волн Россби из инерционного интервала с крупномасштабным зональным течением служит причиной нелокальности слаботурбулентных колмогоровских спектров волн Россби. При таком механизме образования зональных ветров предполагается, что возникающие в результате турбулентных пульсаций мелкомасштабные вихри оказываются неустойчивыми и сливаются при взаимных столкновениях в более крупномасштабные структуры. Дисперсия и турбулентность волн Россби существенно анизотропны, и большие масштабы структур растут в широтном направлении быстрее, чем в меридиональном, как показывают результаты лабораторного и численного моделирования, представленные в работах (*Aubert* et al., 2001; *Aubert* et al., 2002; *Schaeffer*, *Cardin*, 2005; *Read* et al., 2004; *Flierl* et al., 1987; *Galperin* et al., 2006; *Sukoriansky* et al., 1999; *Manfroi*, *Young*, 1999).

В работе (*Balk* et al., 1990) показано, что нелокальность колмогоровских спектров турбулентности служит причиной эволюции спектра, в результате которой формируются две разделенные в пространстве волновых чисел области — мощное зональное течение и струйный спектр мелкомасштабной турбулентности. В последнее время широко исследуется механизм генерации когерентных крупномасштабных структур зонального потока в результате развития параметрической неустойчивости в турбулентной баротропной атмосфере, приведем, например, статьи (*Smolyakovet* al., 2000; *Onishchenko* et al., 2004). Такой механизм обеспечивает эффективный канал переноса энергии из области мелкомасштабной турбулентности волн Россби в область крупномасштабных конвективных движений, соответствующих зональному ветру, и играет важную роль в регуляризации турбулентности атмосферы. Перенос волновой энергии (энстрофии) из области малых масштабов в крупномасштабные структуры (зональный ветер, конвективные ячейки) соответствует обратному каскаду в теории турбулентности. Спонтанное возбуждение крупномасштабных структур мелкомасштабными вихрями Россби можно рассматривать как результат взаимодействия волн в условиях отрицательной вязкости.

Основным источником сведений о циркуляции атмосферы являются наблюдения. Вначале это были наземные наблюдения, затем к ним присоединились зондовые измерения скорости ветра, давления и температуры. Использование авиационной метеорологии, а затем и метеорологических спутников существенно улучшило наблюдение процессов, происходящих в земной атмосфере.

Телевизионная, инфракрасная и радиометрическая аппаратура на спутниках позволяет наблюдать синоптические вихри и ветры (течения), измерять в них распределение температуры и влажности воздуха, оценивать величину и направление скорости ветра, см., например, публикации (*Huang* et al., 2006; *Li* et al., 2003; *Li*, *Fu*, 2006). Эффективность спутниковой метеорологии растет благодаря увеличению числа спутников, количества и качества установленных на них приборов. Расширяется доступ к данным геостационарных и низкоорбитальных спутников. Система архивации метеонаблюдений обеспечивает быстрый и эффективный доступ пользователей к спутниковым данным. Это создает благоприятные условия для изучения динамики движений атмосферы, равномерно наблюдаемой по всему земному шару.

Существенный вклад в современную теорию вихревых структур и турбулентности волн Россби и изучение аналогии их с дрейфовыми волнами в плазме внесли лабораторные эксперименты, описанные в работах (*Незлин*, 1986; *Незлин*, *Снежкин*, 1990; *Aubert* et al., 2001; *Aubert* et al., 2002; *Schaeffer*, *Cardin*, 2005; *Read* et al., 2004). Циркуляция атмосферы моделируется во вращающихся цилиндрических, параболических или кольцевых сосудах. Эти эксперименты способствовали изучению фундаментальных свойств волн Россби и утверждению общефизического взгляда на волны Россби и дрейфовые волны.

В условиях, когда вследствие сложности проблем прямые аналитические методы наталкиваются на непреодолимые трудности, резко возрастает ценность численного моделирования. Вообще говоря, вся динамика атмосферы может быть исследована в рамках полной системы гидродинамических уравнений. Однако из–за громоздкости и сложности такую полную систему уравнений с адекватными граничными и начальными условиями вряд ли удастся решить в обозримом будущем.

В этой связи представляет интерес исследование аналитическими и численными методами упрощенных (модельных) уравнений, в которых явно выделены главные эффекты. Так, например, из метеорологических наблюдений известно (и это отмечал еще Чарни в своей классической работе — *Charney*, 1947), что движение в синоптических вихрях должно обладать следующими свойствами: быть квазигидростатическим по высоте атмосферы, квазидвумерным, квазиадиабатическим и квазигеострофическим.

В данном обзоре мы ограничиваемся обсуждением гидростатических по вертикали и чисто двумерных движений синоптического масштаба на плоскости, пренебрегая вертикальной скоростью и изменением параметров атмосферы по вертикали. Используемое приближение позволяет существенно упростить исходную систему уравнений. На этом пути были получены упрощенные уравнения, описывающие наиболее важные процессы в динамике атмосферы. В.Д. Ларичев и Г.М. Резник (*Ларичев*, *Резник*, 1976), исследуя волны Россби в своей работе 1976 года в рамках нелинейного уравнения Чарни–Обухова, показали, что векторная нелинейность (нелинейность типа $\left[\nabla a \times \nabla b\right]_z$, a и b — некоторые скалярные функции, индекс z соответствует z-компоненте векторного произведения), содержащаяся в этом уравнении, может играть локализующую роль, компенсирующую дисперсионное расплывание пакета волн, подобно скалярной нелинейности в широко известном уравнении Кортевега – де Вриза. В результате такой компенсации в среде формируются нелинейные стационарные вихревые структуры.

В реальной атмосфере, как это видно из синоптических карт, изобары не совпадают с изотермами, такая атмосфера называется бароклинной, в отличие от более простой для исследования баротропной атмосферы, где давление зависит только от плотности, а изобары совпадают с изотермами. В обзоре обсуждаются волны Россби в горизонтально бароклинной атмосфере. Многослойная модель (*Cushman-Roisin* et al., 1992), часто используемая для описания вертикально бароклинной атмосферы, не может быть использована для описания горизонтально бароклинной атмосферы. Длинноволновые возмущения в горизонтально бароклинной атмосфере исследовались в работах (*Алишаев*, 1980; *Петвиашвили*, *Похотелов*, 1998; *Каменец* и др., 1993; *Каменец* и др., 1996), где было показано, что горизонтально бароклинная, так же как и вертикально бароклинная, атмосфера может быть неустойчива.

Теория слаботурбулентных колмогоровских спектров мелкомасштабных волн Россби (с масштабами значительно меньше радиуса Россби) получила развитие в работах (*Сазонтов*, 1980; *Монин*, *Питербарг*, 1987). В работе (*Михайловский* и др., 1988) исследовались спектры крупномасштабных волн Россби, кроме того, в работах (*Balk* et al., 1990; *Михайловский* и др., 1988) исследовалась локальность полученных спектров.

Настоящий обзор посвящен изложению основных результатов теоретических исследований нелинейных волн Россби. Часть I обзора, касающаяся обсуждения результатов лабораторных исследований, численного моделирования и результатов наблюдения волн Россби в атмосферах планет, носит подчиненный характер и касается, в основном, результатов этих исследований, подтверждающих или опровергающих модели теоретических исследований. Раздел II следует рассматривать как введение в теорию нелинейных волн Россби и зональных течений. В результате резонансного взаимодействия возмущений с зональным ветром генерируется широкий спектр волн Россби со случайными фазами. Нелинейным вихревым структурам посвящен раздел III. Формированию слаботурбулентных спектров в результате взаимодействия волн Россби посвящен раздел IV. В разделе V обсуждается генерация зональных ветров волнами Россби.

I. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ АТМОСФЕРЫ

I.1. Приближение мелкой воды

Для описания основных особенностей движения крупномасштабных структур, включающих синоптические вихри и зональные ветры во вращающейся атмосфере (или океане), используется так называемое приближение мелкой воды. В этом приближении атмосфера (или океан) обычно рассматривается как тонкий слой однородной несжимаемой жидкости, вращающийся относительно нормальной к слою оси с угловой скоростью $\Omega\sin\theta$, Ω — угловая скорость вращения Земли, θ — локальная широта.

Из условия гидростатики вдоль оси вращения (вдоль оси z) следует выражение для давления на нижней границе атмосферы

$$p(x, y) = \rho g H \,. \tag{1}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, ρ — постоянная плотность, $H = H_0 + \tilde{H}$ — глубина жидкости, $\tilde{H}$ — отклонение глубины жидкости от равновесной H_0. В этом приближении уравнения непрерывности и движения идеальной несжимаемой жидкости, известные как уравнения мелкой воды, имеют вид

$$\frac{d}{dt}H = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = -g\nabla H + f\left[\mathbf{v}\times\mathbf{e}_z\right], \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$ — конвективная производная по времени, $f = 2\Omega\sin\theta$ — параметр Кориолиса (удвоенная проекция локальной угловой скорости на местную вертикаль), $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости (x, y). Подействовав оператором rot_z на обе части уравнения (3), с учетом уравнения (2) получаем условие обобщенной завихренности в баротропной атмосфере (теорема Эртеля)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{rot}_z\mathbf{v} + f}{H}\right) = 0\,. \tag{4}$$

Если относительная завихренность $\mathrm{rot}_z\mathbf{v}$ имеет тот же знак, что и параметр Кориолиса, т.е. относительная завихренность положительна (с циркуляцией против движения часовой стрелки в северном полушарии) или отрицательна (с циркуляцией по движению часовой стрелки в южном полушарии), то сила Кориолиса направлена от центра рассматриваемой области. Такие движения, представляющие собой циклоны, характеризуются низким давлением в центре. Течения с повышенным давлением в центре, у которых относительная завихренность и параметр Кориолиса имеют разные знаки, — это антициклоны.

В приближении малых чисел Россби, пренебрегая инерционным слагаемым в левой части уравнения движения (3), получаем условие геострофического равновесия, в котором сила Кориолиса уравновешивается силой барического градиента. Скорость движения возмущений в атмосфере в таком приближении, $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_g$, где

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{f\rho}\left[\mathbf{e}_z \times \nabla p\right], \tag{5}$$

называется геострофической скоростью — скоростью градиентного ветра. Из геострофического приближения следует удивительное свойство движения быстровращающейся жидкости, следующее из уравнения (5): движение происходит не вдоль градиента давления, а перпендикулярно ему, вдоль изобар.

При исследовании динамики движений синоптического масштаба К.Г. Россби (*Rossby*, 1939, 1940) обратил внимание на тот факт что при исследовании волн синоптического масштаба в квазигеострофическом приближении необходимо наряду с учетом малой инерционной поправки к геострофической скорости учитывать также слабое изменение параметра Кориолиса в меридиональном направлении (так называемый β-эффект), $f \approx f_0 + \beta y + Ay^2/2$, $A = -f_0/R^2$, $|f_0| \gg |\beta y|$, где $\beta \equiv \partial f/\partial y \approx 2\Omega\cos\theta/R$, и R — радиус планеты. Рассматривая слабые возмущения, полагаем $|\tilde{H}| \ll H_0$ и $|\tilde{p}| \ll p_0$, где $p = p_0 + \tilde{p}$, p_0 — равновесное значение, а $\tilde{p}$ — возмущение. Подставив в качестве скорости вещества геострофическую скорость (5), преобразуем условие обобщенной завихренности (4) к следующему виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{p} - r_{Rs}^2\nabla_\perp^2\hat{p}\right) - v_R\left(1 + \hat{p} + A\frac{y}{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x}\hat{p} - r_{Rs}^4 f_0\left\{\hat{p}, \nabla_\perp^2\hat{p}\right\} = 0. \quad (6)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\hat{p} \equiv \tilde{p}/p_0$ — безразмерное возмущенное давление; $r_{Rs} = c_s/f_0$ — радиус Россби по изотермической скорости звука $c_s = (p_0/\rho_0)^{1/2}$; $v_{Rs} = r_{Rs}^2\beta$ — скорость Россби; $\{A, B\} \equiv [\nabla A \times \nabla B]_z = \partial A/\partial x \partial B/\partial y - \partial A/\partial y \partial B/\partial x$ — скобка Пуассона. В уравнении (6) слагаемое, пропорциональное $p\,\partial p/\partial x$, называется скалярной нелинейностью, а слагаемое со скобкой Пуассона — векторной (или вихревой) нелинейностью. Скалярная нелинейность преобладает над векторной в крупномасштабных вихрях с масштабом, сравнимым с промежуточно-геострофическим радиусом $r_{IG} = \left(r_{Rs}^2 f_0/\beta\right)^{1/3}$. Слагаемое, пропорциональное $Ay\,\partial p/\partial x$, связано с изменением скорости Россби в меридиональном направлении на больших масштабах вихрей, сравнимым с r_{IG}. Вклад эффекта, описываемого этим слагаемым, приводит к явлению, известному как «твистинг», см. обзоры (*Незлин*, 1986; *Незлин*, *Снежкин*, 1990). В результате различные части вихря распространяются с различными скоростями, что приводит к разрушению вихря за время порядка $f_0/\beta v_{Rs}$. Введя обобщенную (потенциальную) завихренность

$$q = r_{Rs}^2\nabla_\perp^2\hat{p} - \hat{p} + \beta y/f - y^2/2R^2, \quad (7)$$

можно уравнение (6) представить в следующем виде

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (8)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_g \cdot \nabla = \partial/\partial t + (\rho_0 f_0)^{-1}\{\tilde{p}\}$. Уравнение (8) представляет собой уравнение сохранения обобщенной (потенциальной) завихренности баротропной атмосферы в промежуточно-геострофическом приближении. При исследовании вихрей Россби в земной атмосфере можно приближенно пренебрегать скалярной нелинейностью и меридиональной зависимостью скорости Россби. В этом приближении из уравнения (6) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{p} - r_{Rs}^2\nabla_\perp^2\hat{p}\right) - v_{Rs}\frac{\partial}{\partial x}\hat{p} - r_{Rs}^4 f_0\left\{\hat{p}, \nabla_\perp^2\hat{p}\right\} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9), соответствующее сохранению обобщенной завихренности q без последнего слагаемого в правой части уравнения (7), называется уравнением Чарни–Обухова. Модификация этого уравнения с учетом неоднородности атмосферы по вертикали использовалась J.G. Charney и A.M. Обуховым при составлении принципиальной схемы прогноза погоды. Решение уравнения (9) обладает симметрией $p(x, y, t) = -p(-x, y, t)$. В отличие от уравнения Кортевега – де Вриза, имеющего решение в виде одномерных солитонов, уравнение Чарни–Обухова не имеет решений в виде нелинейных одномерных или осесимметричных структур.

В фурье-представлении, $\tilde{p} = p_{\mathbf{k}}\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, из уравнения Чарни–Обухова в линейном приближении следует дисперсионное уравнение

$$\omega_{\mathbf{k}} = -\frac{k_x v_{\mathrm{Rs}}}{1+k^2 r_{\mathrm{Rs}}^2}. \tag{10}$$

В принятой системе ось x направлена с запада на восток, а ось y — к ближайшему полюсу. В условиях земной атмосферы, учитывая, что радиус Россби сравним с радиусом Земли, можно приближенно использовать дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega_{\mathbf{k}} = -k_x v_{\mathrm{Rs}} / k^2 r_{\mathrm{Rs}}^2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что фазовая скорость волн Россби, $\omega_{\mathbf{k}}/k_x < 0$, направлена с востока на запад.

Уравнение Чарни–Обухова имеет два сохраняющихся интеграла (интеграла движения): интеграл энергии с точностью до размерного коэффициента

$$W = \int \left[\hat{p}^2 + r_{\mathrm{Rs}}^2 \left(\nabla \hat{p}\right)^2 \right] d^2 x \tag{12}$$

и интеграл энстрофии

$$H = \int \left[\left(\nabla \hat{p}\right)^2 + r_{\mathrm{Rs}}^2 \left(\nabla^2 \hat{p}\right)^2 \right] d^2 x. \tag{13}$$

Интегрирование в уравнениях (12) и (13) производится по произвольной «жидкой» области, точки которой движутся со скоростью $\mathbf{v}$.

I.2. Волны Россби в баротропной атмосфере с зональным ветром. Устойчивость зональных течений

Волны Россби в баротропной атмосфере с зональным ветром — стационарным течением вдоль оси x со скоростью $V(y)$ — и с учетом эффектов вязкости описываются уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_\perp^2 \hat{p} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\hat{p} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial x}\hat{p} + r_{Rs}^2 f_0 \left\{\hat{p}, \nabla_\perp^2 \hat{p}\right\} = \nu \nabla_\perp^4 \hat{p}. \tag{14}$$

Уравнение (14) является обобщением уравнения Чарни–Обухова (9) для мелкомасштабных волн Россби ($r_{Rs}^2 \nabla_\perp^2 \gg 1$) в атмосфере с зональным ветром ($V \neq 0$) и с учетом эффектов вязкости, ν — кинематическая вязкость.

Сдвиговые течения в гидродинамике часто не устойчивы. Присутствие слагаемого в левой части уравнения (14), пропорционального d^2V/dy^2, является необходимым условием развития неустойчивости. Для возмущений вида $\hat{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{p}(y)\exp(-i\omega t + i k_x x)$, линеаризуя уравнение (14) по малым возмущениям, получаем уравнение Орра–Зоммерфельда

$$-i\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_x^2\right)^2 \hat{p} + (\omega - k_x V)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_x^2\right)\hat{p} + k_x (V'' - \beta)\hat{p} = 0. \tag{15}$$

Пренебрегая эффектами вязкости в уравнении (15) получаем

$$\hat{p}'' - k_x^2 \hat{p} + \frac{k_x (V'' - \beta)}{\omega - k_x V}\hat{p} = 0. \tag{16}$$

Здесь $\hat{p}'' \equiv d^2\hat{p}/dy^2$ и $V'' \equiv d^2V/dy^2$. Уравнение (16) является модификацией (при $\beta \neq 0$) известного уравнения Рэлея (см. *Рэлей* (*Стретт Дж.В.*), 1955; *Линь Цзя-Цзяо*, 1958; *Chandrasekhar*, 1961; *Тимофеев*, 1989). Если в некоторой точке $y = y_c$ выполняется равенство

$$V''(y_c) - \beta = 0, \tag{17}$$

то поток может быть неустойчивым. Это равенство — необходимое условие неустойчивости, как показано Рэлеем, а также Линь Цзя-Цзяо. При этом условии дифференциальное уравнение (16) может быть регулярным, даже если в некоторой точке потока выполняется резонансное условие $\omega = k_x V(y_c)$. Для таких колебаний уравнение Рэлея (16) принимает вид

$$\hat{p}'' - k_x^2 \hat{p} + U(y)\hat{p} = 0, \tag{18}$$

где $U(y) = (V'' - \beta)/\left[V(y_c) - V(y)\right]$. Уравнение (18) имеет дискретный набор собственных функций $\hat{p}^{(n)}$ и собственных значений $k_x^{(n)}$ и, следовательно, набор частот $\omega^{(n)} = k_x^{(n)} V(y_c)$, если $U(y) > 0$. Это неравенство является достаточным условием неустойчивости потока. Так как при этом должно выполняться необходимое условие неустойчивости, то достаточное условие неустойчивости сводится к выполнению неравенства для первого члена разложения $U(y)$ вблизи $y = y_c$.

$$U(y_c) = -V'''(y_c)/V'(y_c) > 0\,. \tag{19}$$

Решения уравнения Рэлея находятся как предельный случай решений уравнений Орра–Зоммерфельда при бесконечно малой вязкости, $\nu \to 0$. Выбор ветви многозначного решения уравнения Рэлея вблизи точки ветвления $y = y_c$ основан на использовании правила обхода Линя (*Линь Цзя-Цзяо*, 1958). Существование резонансных точек с соответствующим правилом обхода определяет механизм обмена энергией волн (возмущений) со средним потоком, который не связан непосредственно с вязкой диссипацией и существует в идеальной жидкости. Нелинейные эффекты при взаимодействии волн с плоскопараллельным течением возникают, прежде всего, в окрестности резонансного слоя.

Обычно в земной атмосфере β значительно больше величины V'' в крупномасштабных зональных потоках, и, таким образом, зональный ветер большую часть времени устойчив. В качестве примера приведем зимние и летние значения скорости зонального ветра из статьи (*Stone*, *Nemet*, 1996): на широте 46° N в январе $V'' \approx 1{,}8 \cdot 10^{-12}$ м$^{-1}$с$^{-1}$ и $V'' \approx 0{,}6 \cdot 10^{-12}$ м$^{-1}$с$^{-1}$ в июле. Эти значения существенно меньше величины $\beta \approx 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ м$^{-1}$с$^{-1}$. Однако эпизодически возникают возмущения зонального ветра (wave-breaking event) такие, что в некотором слое $y = y_c$ выполняется условие $\beta \approx V''$. Это является причиной неустойчивости в течение некоторого времени, после чего зональный ветер перестраивается и снова становится устойчивым.

Численному моделированию эволюции возмущений в рамках уравнения Орра–Зоммерфельда, а также уравнения (14) посвящено большое число работ. В частности, в работах (*Flierl* et al., 1987; *Galperin* et al., 2006; *Sukoriansky* et al., 1999; *Manfroi*, *Young*, 1999) исследовалась динамика потока со сдвигом скорости в баротропной атмосфере на нелинейной стадии до квазистационарного состояния в области насыщения неустойчивости. Эти исследования позволили изучить морфологию возникающих в результате развития неустойчивости вихревых структур в виде дипольных вихрей, меандров и разнообразных вихревых дорожек.

I.3. Волны Россби в горизонтально бароклинной атмосфере

В горизонтально бароклинной атмосфере, представляя температуру T, потенциальную температуру Θ (связанную с температурой и давлением соотношением $\Theta = T\left(p_0/p\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$) и давление в виде суммы равновесных значений и слабых возмущений $\tilde{T}(t, x, y)$, $\tilde{\Theta}(t, x, y)$ и $\tilde{p}(t, x, y)$

$$T = T_0 + \tilde{T}(t, x, y)\,,\ \Theta = \Theta_0 + \tilde{\Theta}(t, x, y) \text{ и } p = p_0 + \tilde{p}(t, x, y)\,, \tag{20}$$

можно вместо уравнения обобщенной завихренности (6), следуя (*Каменец* и др., 1993), получить

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{p} - r_R^2 \nabla_\perp^2 \hat{p}\right) - v_R\left(1 + \hat{T} + A\frac{y}{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x}\hat{p} - \\ - r_R^4 f_0\left\{\hat{p}, \nabla_\perp^2 \hat{p}\right\} + r_R^2 f_0\left\{\hat{p}, \hat{\Theta}\right\} = 0, \tag{21}$$

где $r_R = c_s/f_0$ — радиус Россби по адиабатической скорости звука; $c_{sa} = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$; параметры $\hat{T} = \tilde{T}/T_0$ и $\hat{\Theta} = \tilde{\Theta}/\Theta_0$ — безразмерные возмущения температуры и потенциальной температуры. Потенциальная температура, являющаяся однозначной функцией энтропии, связана с температурой и давлением соотношением

$\Theta = T\left(p_0/p\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$. Введя обобщенную завихренность в форме уравнения (7), можно уравнение (21) представить в следующем виде

$$\frac{dq}{dt} = r_R^2 f_0 \left\{\hat{p}, \hat{\Theta}\right\} - v_R \hat{T} \frac{\partial}{\partial x} \hat{p}, \tag{22}$$

где, как и в предыдущем разделе, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_g \cdot \nabla$. В такой атмосфере не сохраняется обобщенная завихренность, в отличие от баротропной атмосферы. Это приводит к тому, что в горизонтально бароклинной атмосфере возможно самопроизвольное рождение вихрей из незамкнутых линий тока.

В реальной атмосфере, как правило, присутствуют крупномасштабные градиенты потенциальной температуры и давления. В основном эти градиенты имеют меридиональное направление. Представим, что равновесная потенциальная температура содержит крупномасштабные равновесные неоднородности в меридиональном направлении $\kappa_\theta y$, $\kappa_p y$, а масштаб слабых возмущений $\tilde{\Theta}(t, x, y)$ и $\tilde{p}(t, x, y)$ существенно меньше, чем κ_θ^{-1} и κ_p^{-1}:

$$\hat{\Theta}_0 = 1 + \kappa_\theta y \ \text{ и } \ \hat{p}_0 = 1 + \kappa_p y. \tag{23}$$

Подставив эти выражения для потенциальной температуры и давления в уравнение сохранения обобщенной температуры, являющейся однозначной функцией энтропии

$$\frac{d}{dt}\Theta = 0, \tag{24}$$

и уравнение (21), получим в пренебрежении скалярной нелинейностью (см. *Петвиашвили*, *Похотелов*, 1988) систему нелинейных уравнений, описывающую горизонтально бароклинную атмосферу с равновесными линейными градиентами давления и потенциальной температуры:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\theta} + \frac{\kappa_\theta}{\rho_o f}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{\kappa_p}{\rho_o f}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \left\{\tilde{p}, \tilde{\theta}\right\} = 0 \tag{25}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{p} - r_R^2 \nabla_\perp^2 \tilde{p}\right) - \left(v_R - f_0 r_R^2 \kappa_\theta\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{p} + f_0 r_R^2 \kappa_p \left(r_R^2 \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \tilde{p} - \frac{p_0}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\theta}\right) -$$
$$-\frac{f_0 r_R^4}{p_0}\left\{\tilde{p}, \nabla^2 \tilde{p}\right\} + \frac{f_0 r_R^2}{\theta_0}\left\{\tilde{p}, \tilde{\theta}\right\} = 0. \tag{26}$$

Система уравнений (25) и (26) сохраняет интеграл энергии, сравнимый с интегралом энергии (15),

$$E \propto \int \left[p^2 + r_R^2 (\nabla p)^2 - \frac{\kappa_p}{\kappa_\theta}\frac{p_0^2}{\theta_0^2}\theta^2\right] d^2 x. \tag{27}$$

Из формулы (27) видно, что энергия не всегда является положительно определенной величиной. Энергия может стать отрицательной, если градиенты потенциальной температуры и давления имеют один и тот же знак. В этом случае атмосфера может быть неустойчивой. В линейном приближении из системы уравнений (25) и (26) следует дисперсионное уравнение

$$\omega_\pm = -\frac{k_x}{2\left(1 + k^2 r_R^2\right)}\left[v_R - f_0 r_R^2\left(\kappa_\theta - \kappa_p\right) + f_0 r_R^4 k^2 \left(\kappa_p^* + \kappa_p\right) \pm D^{1/2}\right], \tag{28}$$

где $\kappa_p^* = \kappa_p/\gamma$ и

$$D = k_x^2 \left\{\left[v_R - f_0 r_R^2\left(\kappa_\theta - \kappa_p^*\right) - f_0 r_R^4 k^2 \left(\kappa_p^* - \kappa_p\right)\right]^2 - 4 f_0^2 r_R^6 k^2 \kappa_\theta \kappa_p^*\right\}. \tag{29}$$

Из равенства (29) видно, что если κ_θ и κ_p имеют один знак, то при некотором значении k подкоренное значение в дисперсионном уравнении может стать отрицательным. Это условие горизонтально бароклинной неустойчивости совпадает с выводом, следующим из условия положительной определенности интеграла энергии (27).

II. ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ

Переходим к рассмотрению нелинейных вихревых структур, описываемых уравнением Чарни–Обухова. При исследовании стационарных волн, бегущих вдоль оси x со скоростью u в мелкой баротропной атмосфере, введя переменную $\eta = x - ut$, можно уравнение Чарни–Обухова (9) привести к следующему виду:

$$\left\{\nabla^2 \hat{p} - \Lambda\hat{p},\ \hat{p} + y/b\right\} = 0\,, \tag{31}$$

где константы Λ и b определены равенствами

$$\Lambda = \frac{1}{r_R^2}\left(1 + \frac{v_R}{u}\right),\quad b = \frac{r_R^2 f_0}{u}\,. \tag{32}$$

Скобка Пуассона $\{A, B\}$ может быть представлена как z-проекции векторного произведения $\{A, B\} = [\nabla A, \nabla B]_z$. Поэтому переход от (31) к уравнению

$$\nabla^2 \hat{p} - \Lambda\hat{p} = F\left(\hat{p} + y/b\right), \tag{33}$$

где F — произвольная функция своих аргументов, иногда (*Тимофеев*, 1989) называют *векторным интегрированием.* Рассмотрим некоторые частные решения уравнения (33).

II.1. Дипольные вихри

Воспользовавшись решением (33), возьмем в качестве F линейную функцию

$$\nabla^2 \hat{p} - \Lambda\hat{p} = C\left(\hat{p} + y/b\right), \tag{34}$$

где C — произвольная константа. Наряду с декартовыми координатами x и η при анализе вихревых структур, описываемых уравнением (34), будем использовать также полярные координаты $r = \left(x^2 + \eta^2\right)^{1/2}$ и $\vartheta = \operatorname{arctg}(\eta/x)$. Следуя работе (*Ларичев*, *Резник*,

1976) при исследовании пространственно локализованных (уединенных) вихрей, введем представление о внешней и внутренней областях вихря, разделенных некоторой границей $r = a$, где a — некоторая константа, называемая радиусом вихря. Во внешней области вихря $C = 0$, а во внутренней — $C \neq 0$. Важным частным решением является так называемый дипольный вихрь

$$\hat{p}(r, \vartheta) = \Phi(r)\cos\vartheta\,, \tag{35}$$

где функция $\Phi(r)$ во внешней области вихря, $r > a$, равна

$$\Phi(r) = \Phi(a) K_1(r\beta/a)/K_1(\beta)\,, \tag{36}$$

а во внутренней области, $r < a$,

$$\Phi(r) = \Phi(a)\left[\left(1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\frac{r}{a} - \frac{\beta^2}{\gamma^2}\frac{J_1(r\gamma/a)}{J_1(\gamma)}\right], \tag{37}$$

где константы β и γ связаны с Λ и C соотношениями

$$\beta^2 = a^2\Lambda \text{ и } \gamma^2 = -a^2(\Lambda + C)\,, \tag{38}$$

а K_1 и J_1 — соответственно модифицированная функция 2-го рода и функция Бесселя.

Ясно, что для ограниченности p необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\beta^2 > 0$, т. е. необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\Lambda > 0$. Из этого неравенства и уравнения для Λ (32) следует, что вихри, распространяющиеся на Восток, могут иметь, вообще говоря, любую скорость ($u > 0$), в то время как вихри, распространяющиеся на запад должны двигаться со скоростью больше скорости Россби. Из условия непрерывности p, $\partial p/\partial r$, $\nabla^2 p$ и $\partial\nabla^2 p/\partial r$ на границе вихря, при $r = a$, следует условие, называемое условием сшивки параметров вихря

$$K_2(\beta)/\beta K_1(\beta) = -J_2(\gamma)/\gamma J_1(\gamma)\,. \tag{39}$$

Приближенное решение дисперсионного уравнения (39) имеет вид

$$\beta \approx 3{,}9 + 1{,}2\gamma^2 \Big/ \left(3{,}4 + \gamma^2\right). \tag{40}$$

В дипольном вихре с таким условием сшивки сохраняется как энергия, см. уравнение (12), так и энстрофия вихря, см. уравнение (13).

II.2. Вихревые дорожки

Исследуем структуры, движущиеся вдоль оси x в западном направлении со скоростью v_R. В таких структурах $\Lambda = 0$, а операция векторного интегрирования позволяет свести уравнение Чарни–Обухова, согласно уравнению (33), к уравнению

$$\nabla^2 \hat{p} = F\left(\hat{p} - y/r_f\right), \tag{41}$$

где $r_f \equiv f_0/\beta$ — характерный масштаб изменения параметра Кориолиса. Уравнение (41) совпадает с условием сохранения завихренности невязкой несжимаемой жидкости, следующее из уравнения Навье–Стокса, $\nabla^2\psi = F(\psi)$, где ψ — функция тока. Воспользовавшись известным частным аналитическим решением уравнения (41) периодическим по x и имеющим вид зонального течения по координате y, см., например, статью (*Михайловский* и др., 1984), подставим в уравнение (41) в качестве F функцию

$$F\left(\hat{p} - y/r_f\right) = k^2 K \exp\left[-2\left(\hat{p} - y/r_f\right)/K\right]. \tag{42}$$

Смысл параметров k и K будет ясен ниже. В результате получаем решение уравнения Чарни–Обухова в виде зонального потока, содержащего вихревую дорожку типа «кошачий глаз» из работы (*Stuart*, 1967)

$$\hat{p} = y/r_f + K \ln\left[C \,\mathrm{ch}(kx) + \left(C^2 - 1\right)^{1/2} \cos(ky)\right], \tag{43}$$

параметр K характеризует амплитуду вихревой дорожки, $2\pi/k$ — размер вихря. Из уравнений (5) и (43) получаем следующие выражения для компонент скорости

$$v_x = v_R k r_f K \frac{C\, sh(ky)}{C\,\mathrm{ch}(ky) + \left(C^2-1\right)^{1/2}\cos(kx)}, \tag{44}$$

$$v_y = v_R k r_f K \frac{\left(C^2-1\right)^{1/2}\sin(kx)}{C\,\mathrm{ch}(ky) + \left(C^2-1\right)^{1/2}\cos(kx)}, \tag{45}$$

где C — некоторая константа. При $C = 1$ решение (45) описывает течение типа зонального потока

$$v_x = v_R k r_f K \,\mathrm{th}(ky), \quad v_y = 0. \tag{46}$$

Решение, соответствующее вихревым дорожкам (43), является аналитическим, в отличие от разрывного в старших производных решения Ларичева–Резника для дипольного вихря (модона). Решение уравнения Чарни–Обухова представляет собой поток с вихревой дорожкой типа «кошачий глаз».

III. КОЛМОГОРОВСКИЕ СПЕКТРЫ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

III.1. Исходные уравнения слабой турбулентности

Рассмотрим слабую турбулентность, обусловленную трехволновым взаимодействием, которая описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} \propto \int U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\left[N_{\mathbf{k}1}N_{\mathbf{k}2} - N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}1}\mathrm{sign}(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}2}) - \right.$$
$$\left. - N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}2}\mathrm{sign}(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}1})\right]\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}1} - \omega_{\mathbf{k}2})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \tag{47}$$

где N_k — «число квантов» (или «плотность волнового действия»),

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left|V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\right|^2; \tag{48}$$

$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ — матричный элемент взаимодействия, обладающий соответствующими свойствами симметрии, см., например, статьи

(*Захаров*, *Львов*, 1975 или *Захаров*, 1984). В правой части равенства (47) пропущен постоянный множитель, зависящий от нормировки N_k и $\omega_{\mathbf{k}}$. Полагаем, что матричный элемент $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ обладает свойствами масштабной инвариантности

$$V(\varepsilon_x k_x, \varepsilon_y k_y; \varepsilon_x k_{x1}, \varepsilon_y k_{y1}; \varepsilon_x k_{x2}, \varepsilon_y k_{y2}) = \\ = \varepsilon_x^u \varepsilon_y^v V(k_x, k_y; k_{x1}, k_{y1}; k_{x2}, k_{y2}) \qquad (49)$$

с показателями однородности u и v. Кроме того, полагаем, что дисперсионная часть частоты волны для слабо диспергирующих волн, $\omega_{\mathbf{k}} = k_x v_R$, или частота волны для сильно диспергирующих волн, также обладают свойствами масштабной инвариантности с показателями однородности a и b. В этих предположениях, а также в предположении, что искомое выражение для числа квантов также является масштабно инвариантной функцией с показателями однородности α и β, кинетическое уравнение для волн (47) может быть представлено в следующем виде, см. статью (*Михайловский* и др., 1988):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} \propto |k_x|^{2\alpha+2u+1-a} |k_y|^{2\beta+2v+1-b}, \qquad (50)$$

или

$$\frac{\partial D_{\mathbf{k}}^{(i)}}{\partial t} + \nabla \mathbf{P}^{(i)}(\mathbf{k}) = 0, \qquad (51)$$

где $i = 1$ или 2, $D_{\mathbf{k}}^{(1)} \equiv |\Omega_{\mathbf{k}}| N_{\mathbf{k}}$; $D_{\mathbf{k}}^{(2)} \equiv |k_x| N_{\mathbf{k}}$.

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{k}) \propto |k_x|^{2(\alpha+u+1)} |k_y|^{2(\beta+v+1)} \left(\frac{1}{|k_y|}, \frac{1}{|k_x|} \right), \qquad (52)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{k}) \propto |k_x|^{2\alpha+2u+3-a} |k_y|^{2\beta+2v+2-b} \left(\frac{1}{|k_y|}, \frac{1}{|k_x|} \right). \qquad (53)$$

В случае слабодиспергирующих волн $D_{\mathbf{k}}^{(1)}$ имеет смысл энстрофии (или дисперсионной части энергии), а $D_{\mathbf{k}}^{(2)}$ — энергии волн. Тогда уравнение (51) с индексом $i = 1$ соответствует уравнению сохранения энстрофии, а с индексом $i = 2$ — сохранения энергии. Для таких волн $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{k})$ — поток энстрофии, а $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{k})$ — поток энергии. Из условия постоянства потоков энстрофии или энергии находим искомые показатели однородности числа квантов

$$\alpha^{(1)} = -(1+u), \ \beta^{(1)} = -(1+v), \qquad (54)$$

$$\alpha^{(2)} = a/2 - (3/2+u), \ \beta^{(1)} = b/2 - (1+v). \qquad (55)$$

Таким образом, для нахождения стационарных степенного вида решений волнового кинетического уравнения необходимо, чтобы дисперсия и матричный элемент взаимодействия были масштабно инвариантными функциями волновых векторов.

III.2. Матричный элемент взаимодействия волн

Представляем p в терминах фурье-гармоник

$$p = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{kr} - i\omega_{\mathbf{k}} t) + c.c., \qquad (56)$$

где *c.c.* — комплексно сопряженное состояние; $p_{\mathbf{k}}(t)$ — амплитуда фурье-гармоники, слабо изменяющаяся во времени; $\omega_{\mathbf{k}}$ — частота фурье-гармоники с волновым вектором $\mathbf{k}$, определяемая линейным дисперсионным уравнением (11).

Уравнению Чарни–Обухова (9) соответствует динамическое уравнение (см. *Сазонтов*, 1980 или *Монин*, *Питербарг*, 1987)

$$\frac{\partial p_{\mathbf{k}}}{\partial t} \propto \sum_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]_z \frac{k_2^2 - k_1^2}{1 + k^2 r_R^2} p_{\mathbf{k}1} p_{\mathbf{k}2} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}1} + \omega_{\mathbf{k}2} - \omega_{\mathbf{k}})t]. \qquad (57)$$

Спектральная плотность энергии, согласно уравнению (12), имеет вид

$$W_{\mathbf{k}} \propto \left(1+k^2 r_R^2\right)\left|p_{\mathbf{k}}\right|^2. \qquad (58)$$

Число квантов $N_{\mathbf{k}}$, определенное из условия $N_{\mathbf{k}} \propto W_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}$, равно

$$N_{\mathbf{k}} \propto \left(1+k^2 r_R^2\right)^2 \left|p_{\mathbf{k}}\right|^2 \left|k_x\right|. \qquad (59)$$

Введем понятие нормированной комплексной амплитуды волн, воспользовавшись равенством $N_{\mathbf{k}} \propto \left|C_{\mathbf{k}}\right|^2$,

$$C_{\mathbf{k}} \propto \left(1+k^2 r_R^2\right)\left|p_{\mathbf{k}}\right|\left|k_x\right|^{-1/2}. \qquad (60)$$

Используя соотношение (60) и распадное условие $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}1} + \omega_{\mathbf{k}2}$, преобразуем динамическое уравнение (57) к каноническому виду

$$i\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} V\left(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\right) C_{\mathbf{k}1} C_{\mathbf{k}2} \exp\left[-i\left(\omega_{\mathbf{k}1}+\omega_{\mathbf{k}2}-\omega_{\mathbf{k}}\right)t\right]. \qquad (61)$$

В результате такого представления получаем выражение для матричного элемента взаимодействия

$$V\left(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\right) \propto \left|k_x k_{x1} k_{x2}\right|^{1/2} \left(\frac{k_{x1}}{1+k_1^2 r_R^2} + \frac{k_{x2}}{1+k_2^2 r_R^2} - \frac{k_x}{1+k^2 r_R^2}\right). \qquad (62)$$

В работах (*Balk* et al., 1990; *Сазонтов*, 1980; *Монин*, *Питербарг*, 1987) матричный элемент получался в рамках гамильтонового формализма. При исследовании турбулентности будем рассматривать порознь коротковолновую, $k^2 r_R^2 \gg 1$, или длинноволновую, $k^2 r_R^2 \ll 1$, составляющие; кроме того, будем исследовать волны с $k_y \gg k_x$. Согласно работам (*Balk* et al., 1990; *Михайловский* и др., 1988), основная часть энергии волн Россби содержится в волнах с $k_y \gg k_x$.

III.3. Коротковолновая турбулентность

В коротковолновом приближении, $k^2 r_R^2 \gg 1$, и приближении $k_y \gg k_x$ частота волн Россби и матричный элемент взаимодействия равны

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx k_x k_y^{-2} \qquad (63)$$

и

$$V\left(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\right) \approx \left|k_y k_{y1} k_{y2}\right|^{1/2} \left(\frac{1}{k_{x1}} + \frac{1}{k_{x2}} - \frac{1}{k_x}\right). \qquad (64)$$

Следовательно, показатели масштабной инвариантности частоты и матричного элемента равны $a = 1$, $b = -2$, $u = 3/2$ и $v = -1$. Этим показателям соответствуют энергетические спектры

$$W_{\mathbf{k}} \propto k_x^{-3/2} k_y^{-2} \qquad (65)$$

и

$$W_{\mathbf{k}} \propto k_x^{-3/2} k_y^{-3}. \qquad (66)$$

Спектр (65) связан с потоком энергии, а спектр (66) — с потоком энстрофии. Численное моделирование коротковолновой изотропной ($k_x = k_y$) турбулентности волн, описываемых уравнением Чарни–Обухова, проведенное в работах (*Hasegawa* et al., 1979; *Williams*, 1978), дает форму спектров, близкую к $W_{\mathbf{k}} \propto k_\perp^{-4}$. На пределах применимости, т. е. при $k_x \approx k_y \approx k_\perp$, из (65) и (66) следует $W_{\mathbf{k}} \propto \left(k_\perp^{-7/2}, k_\perp^{-9/2}\right)$, так что численное значение показателя спектра лежит между двумя колмогоровскими. Дополнительный анализ локальности спектров, проведенный в работе (*Михайловский* и др., 1988), показывает, что спектр (65), связанный с потоком энергии, является локальным, а спектр (66), связанный с потоком энстрофии, — нелокальным. Нелокальность спектра обусловлена длинноволновой частью с $k_x \propto k_y^3$. Эта часть спектра соответствует зональным течениям. Поток энергии в спектре (65) направлен в сторону больших k_x и меньших k_y, аналогичная закономерность наблюдается в численных экспериментах (*Hasegawa* et al., 1979, а также *Williams*, 1978). Поток энстрофии в спектре (66) направлен в сторону малых k_y.

III.4. Длинноволновая турбулентность

В длинноволновом приближении $k^2 r_R^2 \ll 1$ для волн с $k_y \gg k_x$ дисперсионная часть частоты волны имеет вид

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx k_x k_y^2, \tag{67}$$

т. е. частота масштабно инвариантна с показателями однородности

$$a = 1,\ b = 2. \tag{68}$$

Матричный элемент (62) в рассматриваемом приближении равен

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \propto \left|k_x k_{x1} k_{x2}\right|^{1/2} \left(k_{x1}^3 + k_{x2}^3 - k_x^3\right). \tag{69}$$

Отсюда получаем

$$u = 3/2,\ v = 3. \tag{70}$$

Этим показателям соответствуют энергетические спектры

$$W_{\mathbf{k}} \propto k_x^{-3/2} k_y^{-4} \tag{71}$$

и

$$W_{\mathbf{k}} \propto k_x^{-3/2} k_y^{-3}. \tag{72}$$

Спектр (72) связан с потоком энергии, а спектр (71) — с потоком энстрофии. Анализ локальности спектров (*Михайловский* и др., 1988) показывает, что, как и в коротковолновом приближении, спектр (72), связанный с потоком энергии, является локальным, а спектр (71), связанный с потоком энстрофии, — нелокальным. Нелокальность обусловлена длинноволновой частью спектра с $k_x \propto k_y$, однако это противоречит исходному предположению, $k_y \gg k_x$.

IV. ГЕНЕРАЦИЯ ЗОНАЛЬНОГО ВЕТРА

Исследуем динамику взаимодействия волн Россби с зональным ветром в турбулентной баротропной атмосфере. Так как зональный ветер изменяется в течение временных масштабов, больших, чем характерное время волн Россби, используем метод многомасштабного разложения, предполагая, что имеется большой интервал в области волновых чисел, разделяющий область мелкомасштабной турбулентности волн Россби и область зонального ветра. Следуя стандартной процедуре, представим возмущение атмосферного давления в виде суммы низкочастотной и высокочастотной частей, $p = \overline{p} + \tilde{p}$, где $\overline{p}(\mathbf{R}, T)$ соответствует крупномасштабным возмущениям давления в зональном ветре, а $\tilde{p}(\mathbf{r}, t; \mathbf{R}, T)$ — возмущению давления в мелкомасштабных волнах Россби, **R** и T — большие масштабы, а **r** и t — малые. Усредняя уравнение (9) по малым временным масштабам, получаем уравнение эволюции давления зонального ветра

$$\nabla_\perp^2 \frac{\partial}{\partial T} \hat{p} = -f r_R^2 \overline{\left\{\tilde{p}, \nabla_\perp^2 \tilde{p}\right\}}, \tag{73}$$

где черта означает процесс усреднения по малым временам. Правая часть в уравнении (73) описывает рейнольдсовские напряжения мелкомасштабных волн Россби. Взаимодействие волнового пакета мелкомасштабных волн Россби с зональным потоком описывается волновым кинетическим уравнением

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} + \gamma N_{\mathbf{k}} = S, \tag{74}$$

где S — правая часть в уравнении (47). Слагаемое с γ характеризует источники и стоки волн, которыми мы в данном разделе пренебрегаем. В отличие от предыдущего раздела, где определялось точное равновесное стационарное решение уравнения (74), соответствующее условию $S = 0$, ищем решение уравнения (74), когда левая часть уравнения равна нулю. Уравнения (73) и (74) описывают динамику взаимодействия волнового пакета волн Россби с зональным ветром. Полагаем, что спектр волн Россби состоит из равновесной и модуляционной частей $N_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}^0 + \tilde{N}_{\mathbf{k}}$, $N_{\mathbf{k}}^0 \gg \tilde{N}_{\mathbf{k}}$, а частота волн представима в виде $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^0 + k_x V$, где $V = f r_R^{*2} \partial\hat{p}/\partial y$ — геострофическая скорость зонального потока, обусловленного конечным градиентом от $\hat{p}$, и $\omega_{\mathbf{k}}^0 \gg k_x V$. Считая, что $\left(\tilde{N}_{\mathbf{k}}, \hat{p}\right) \propto \exp\left(-i\Omega T + iqY\right)$, линеаризуем систему уравнений (73) и (74). В результате получаем

$$-i\Omega\hat{p} = f r_R^{*2} \int k_x k_y \left|p_{\mathbf{k}}\right|^2 d\mathbf{k} \tag{75}$$

и

$$\tilde{N}_{\mathbf{k}} = -iq^2 r_R^2 \frac{k_x v_R}{\Omega - qV_g} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^0}{\partial k_y}. \tag{76}$$

Здесь $V_g = \partial\omega_k / \partial k_y$ — компонента групповой скорости. Учитывая, что $\tilde{N}_{\mathbf{k}} = k^2 \left|p_{\mathbf{k}}\right|^2 / \omega_{\mathbf{k}}$ и $V_g = -2\omega_k k_y / k^2$, получаем из системы уравнений (75) и (76)

$$\Omega = -\frac{f^2}{2} q^2 r_R^2 \int d\mathbf{k} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^0}{\partial k_y} \frac{V_g k_x}{\Omega - qV_g}. \tag{77}$$

В приближении $N_k^0 = N^0 \delta\left(k_x - k_{x0}\right) W\left(k_y - k_{y0}, \Delta k_y\right)$, где $W\left(k_y - k_{y0}, \Delta k_y\right)$ — ступенчатая функция (box function), $W\left(k_y - k_{y0}, \Delta k_y\right) = \Delta k_y^{-1}$ при $\left|k_y - k_{y0}\right| < \Delta k_y / 2$, и $\Delta k_y \ll k_{y0}$ и $W\left(k_y - k_{y0}, \Delta k_y\right) = 0$ при всех остальных k_y. В этом приближении из (77) следует

$$\Omega = -\frac{f^2}{2} q^2 r_R^4 \frac{k_{x0}}{2\Delta k_y} N_0 \left[\frac{V_g - V_g' \Delta k_y}{\Omega - qV_g + V_g' \Delta k_y q/2} - \frac{V_g + V_g' \Delta k_y}{\Omega - qV_g - V_g' \Delta k_y q/2} \right], \tag{78}$$

где $V_g' \equiv \partial V_g / \partial k_y = -2k_y \omega_{\mathbf{k}} / k^2$. Из уравнения (78) в приближении $\Delta k_y = q$ получаем

$$\left(\Omega - qV_g\right)^2 - \left(V_g' q^2 / 2\right)^2 = 2f^2 q^2 k_0^2 r_R^4 \left|\tilde{p}_{\mathbf{k}0}\right|^2. \tag{79}$$

Отсюда выражение для инкремента $\gamma \equiv \mathrm{Im}\Omega$, при этом действительная часть частоты равна нулю, $\mathrm{Re}\Omega = 0$

$$\gamma = (2f^2 q^2 k_0^2 r_R^4 \,|\, \tilde{p}_{\mathbf{k}0} \,|^2 - \frac{q^4}{k^4} \omega_{\mathbf{k}})^{1/2}. \tag{80}$$

Полученное выражение для инкремента параметрической неустойчивости генерации зонального ветра справедливо, вообще говоря, на начальной квазилинейной стадии неустойчивости. Из (80) следует условие для масштабов структуры зонального ветра, при которых существует неустойчивость

$$0 < \left(\frac{q}{k}\right)_{\max}^2 < 2\left(\frac{f}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^2 (kr_R)^4 \,|\, \tilde{p}_{\mathbf{k}0} \,|^2. \tag{81}$$

При заданном значении k наиболее быстро растут возмущения, удовлетворяющие условию

$$\left(\frac{q}{k}\right)_{\max}^2 = \left(\frac{f}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^2 (kr_R)^4 \,|\, \tilde{p}_{\mathbf{k}0} \,|^2. \tag{82}$$

При этом максимальный инкремент равен

$$\gamma = \frac{f^2}{\omega_{\mathbf{k}}} \left(kr_R\right)^6 \left|\tilde{p}_{\mathbf{k}0}\right|^2. \tag{83}$$

Для типичных значений параметров земной атмосферы на широте 30°, $f \approx 0{,}8 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, $r_R \approx 4 \cdot 10^6$ м, $\tilde{p}_{\mathbf{k}0} \approx 10^{-2}$, $k_0 r_R \approx 2$ и $v_R \approx 3 \cdot 10^2$ м/с, получаем инкремент неустойчивости $\gamma \approx 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$, соответствующий характерному времени развития неустойчивости $\gamma^{-1} \approx 5$ дней. В результате развития неустойчивости формируется периодическая структура в меридиональном направлении с характерным масштабом $q_{\max}^{-1} \approx 3 \cdot 10^6$ м. Эти грубые оценки согласуются с результатами наблюдений зонального ветра. Таким образом, рассмотренная неустойчивость может быть ответственна за генерацию зонального ветра.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (05-05-64992 и 06-05-65176) и Программы Президиума РАН № 16.

Литература

Алишаев Д.М. О динамике двумерной бароклинной атмосферы // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. С. 99–107.

Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

Голицын Г.С. Введение в динамику планетарных атмосфер. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 104 с.

Захаров В.Е. Колмогоровские спектры в задачах слабой турбулентности // Основы физики плазмы / Под. ред. А.А. Галеева и Р. Судана. Т. 2. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 48–79.

Захаров В.Е., *Львов В.С.* О статистическом описании нелинейных волн // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1975. Т. 13. С. 1470–1487.

Каменец Ф.Ф., *Коробов И.И.*, *Онищенко О.Г.* Эволюция вихрей в атмосфере Юпитера, образовавшихся после столкновения планеты с кометой Шумейкера–Леви 9 // Письма в ЖЭТФ. 1996. № 95. С. 324–329.

Каменец Ф.Ф., *Петвиашвили В.И.*, *Пухов А.М.* Упрощенная динамика мелкой бароклинной атмосферы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. С. 457–463.

Ларичев В.Д., *Резник Г.М.* О двумерных уединенных волнах Россби // ДАН СССР. 1976. Т. 231. С. 1077–1079.

Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической неустойчивости. М.: ИЛ, 1958.

Михайловский А.Б., *Лахин В.П.*, *Онищенко О.Г.*, *Смоляков А.И.* К теории вихрей в плазме // ЖЭТФ. 1984. № 86. С. 2061–2074,

Михайловский А.Б., *Новаковский С.В.*, *Онищенко О.Г.* Колмогоровские спектры слабой турбулентности неоднородной замагниченной плазмы // ЖЭТФ. 1988. № 94. С. 159–171.

Монин А.С., *Жихарев Г.М.* Океанские вихри // УФН. 1990. № 160. С. 1–47.

Монин А.С., *Кошляков М.Н.* Синоптические вихри, или волны Россби, в океане. Эксперимент и основы теории // Нелинейные волны: Сб. / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 258–291.

Монин А.С., *Питербарг Л.И.* О кинетическом уравнении для волн Россби–Блиновой // ДАН СССР. 1987. Т. 295. С. 816–820.

Незлин М.В. Солитоны Россби // УФН. 1986. № 150. С. 3–58.

Незлин М.В., *Снежкин Е.Н.* Вихри Россби и спиральные структуры. М.: Наука, 1990.

Обухов А.М. К вопросу о геострофическом ветре // Изв. АН СССР. География и геофизика. 1949. Т. 13. С. 281.

Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1. Гл. 3.

Петвиашвили В.И., *Похотелов О.А.* [1]. Уравнения мелкой атмосферы // ДАН СССР. 1988. Т. 300. С. 856–858.

Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. [2]. Уединенные вихри в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 200 с.

Рэлей (*Стретт Дж.В.*). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955.

*Сазонтов А.*Г. Тонкая структура и синоптическая изменчивость морей. Таллин, 1980. С. 147–152.

Тимофеев А.В. [1]. Резонансные явления в колебаниях неоднородных течений сплошных сред, Вопросы теории плазмы. Вып. 17 / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1989. С. 157.

Тимофеев А.В. [2]. Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2000. 224 с.

Aubert J., *Brito D.*, *Cardin P.*, *Nataf H.-C.*, *Masson J.-P.* A systematic experimental study of spherical shell rotating convection in water and liquid gallium // Physics Earth Planet. Int. 2001. V. 128. P. 51.

Aubert J., *Jung S.*, *Swinney H.L.* Observations of zonal flow created by potential vorticity mixing in a rotating fluid // Geophysical Research Letters. 2002. V. 29. dpi: 10.1029/2002GL015422.

Balk A.M., *Nazarenko S.V.*, *Zakharov V.E.* On the nonlocal turbulence of drift waves // Physics Letters. A. 1990. V. 146. P. 217–221.

Busse F.H. Convection-driven zonal flows and vortices in the major planets // Chaos. 1994. V. 4. P. 123.

Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. L.: Oxford Univ. Press, 1961.

Charney J.G. On the scale of atmospheric motions // Geophys. Public Kasjones Norske Videnshap. Acad. Oslo, 1947. V. 17. P. 1–17.

Cushman-Roisin B., *Sutyrin G.G.*, *Tang B.* Two-layer geostrophic dynamics. Part 1: Governing Equations // J. Physics Oceanography. 1992. V. 22. P. 117–127.

Flierl G.R., *Malanotte-Rizzoli P.*, *Zabusky N.J.* Nonlinear waves and coherent vortex structures in barotropic в-plane jets // J. Phys. Oceanog. 1987. V. 17. P. 1408–1438.

Galperin B., *Sukoriansky S.*, *Diakovskaya N.* et al. Anisotropic turbulence and zonal jets in rotating flows with a в-effect // Nonlinear Geophysics: Proc. 2006. V. 13. P. 83–98.

Hasegawa A., *Maclennan C.*, *Kodama Y.* Nonlinear behavior and turbulence spectra of drift waves and Rossby waves // Physics Fluids. 1979. V. 22. P. 2122–2129.

Horton W., *Hasegawa A.* Quasi-two-dimensional dynamics of plasmas and fluids // Chaos. 1994. V. 4. P. 227–251.

Huang F.T., *Mayr H.*, *Reber C.A.*, *Russel J.*, *Mlynczak M.*, *Mengel J.* Zonal-mean temperature variations inferred from SABER measurements on TIMED compared with UARS observations // J. Geophysical Research. 2006. V. 111, A10S07, doi.: 10.1029/2005JA011427.

Kamenkovich V.M., *Koshlyakov M.N.*, *Monin A.S.* Synoptic eddies in the ocean. Reidel Publication Computers. Netherlands, 1986.

Li T., *Fu B.* Tropical cyclogenesis associated with Rossby wave energy dispersion of a preexisting typhoon. Part I: Satellite data analyses // J. Atmospherical Science 2006. V. 63 P. 1377–1409.

Li T., *Ge X.*, *Peng M.* Satellite data analysis and numerical simulation of tropical cyclone formation // Geophysical Research Letters. 2003. V. 30. 2122, doi:10.1029/2003GL01556,
Manfroi A.J., *Young W.R.* Slow evolution of zonal jets on the beta plane // J. Atmospherical Science. 1999. V. 56. P. 784–800.
Onishchenko O.G., *Pokhotelov O.A.*, *Sagdeev R.Z.*, *Shukla P.K.*, *Stenflo L.* Generation of zonal flows by Rossby waves in the atmosphere // Nonlinear Geophysics: Proc. 2004. V. 11. P. 211–244.
Read P., *Yamazaki Y.*, *Williams S.* et al. Jupiter's and Saturn's convectively driven banded jets in the laboratory // Geophysical Research Letters. 2004. V. 31. L22701, doi:10.1029/2004GL020106,
Rhines P.B. Waves and turbulence on a beta-plane // J. Fluid Mechanics. 1975. V. 69. P. 417–443.
Rossby C.-G. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action // J. Marine Research. 1939. V. 2. P. 38–55.
Rossby C.-G. Planetary flow patterns in the atmosphere, Quart. // J. Royal Meteorological Society. 1940. V. 66. P. 68–87.
Schaeffer N., *Cardin P.* Rossby-wave turbulence in a rapidly rotating sphere // Nonlinear Geophysics: Proc. 2005. V. 12. P. 947–953.
Smolyakov A.I., *Diamond P.H.*, *Shevchenko V.I.* Zonal flow generation by parametric instability in magnetized plasmas and geostrophic fluids // Physics Plasmas. 2000. V. 7. P. 1349.
Stone P.H., *Nemet B.* Baroclinic adjustment: A comparison between theory, observations, and models // J. Atmospherical Science. 1996. N° 53. P. 1663–1674.
Stuart J.T. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers // J. Fluid Mechanics. 1967. V. 29. P. 417.
Sukoriansky S., *Galperin B.*, *Chekhlov A.* Large scale drag representation in simulations of two-dimensional turbulence // Physics Fluids. 1999. V. 11. P. 3043–3053.
Swann A., *Sobel A.*, *Yuter S.*, *Kiladis G.* Observed radar reflectivity in convectively coupled Kelvin and mixed Rossby-gravity waves // Geophysical Research Letters. 2006. V. 33. L10804, doi:10.1029/2006GL025979.
Terry P.W. Suppression of turbulence and transport by sheared flow // Reviews of Modern Physics. 2000. V. 72. P. 109–165.
Vasavada A., *Showman A.* Jovian atmospheric dynamics: an update after Galileo and Cassini // Report Programm Physics. 2005. V. 68. P. 1935–1996. doi: 10.1088/0034-4885/68/8R06.
Williams G.P. Planetary circulations. 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence // J. Atmospherical Science. 1978. V. 35. 1399–1426.
Yano J., *Talagrand O.*, *Drossart P.* Origins of atmospheric zonal winds // Nature. 2003. V. 421. P. 36.