

ISSN 2075-6836

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАН  
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР



**А. С. Петросян**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ  
ГИДРОДИНАМИКИ  
ТЯЖЁЛОЙ ЖИДКОСТИ  
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

Серия «Механика, управление, информатика»

**МОСКВА  
2010**

*A. S. Petrosyan*

**Complimentary Chapters of Heavy Fluid  
with the Free Surface Hydrodynamics**

The textbook is based on the lectures for students of the department of the space physics at Moscow Institute of Physics and Technology (State University). The manual includes chapters which are not covered in existing textbooks. The solution for the problem of a stationary flow on the step in shallow water approximation is provided. Quasi-two layer theory for shallow water flows on the step taking into consideration vertical dependence of horizontal flows is given. Also the solution of Riemann problem for the shallow water flows on the step based on quasi-two later theory is given. Numerical methods for shallow water flows on complex nonhomogenous boundary and their extension in presence of rotation and arbitrary external forces are given. The textbook is useful for students and postgraduates who are major in hydrodynamics.

*Keywords:* hydrodynamics, gravity force, free surface, shallow water equations

Данный материал основан на курсе лекций, читаемом для студентов кафедры космической физики Московского физико-технического института (Государственного университета), и может служить им учебным пособием. В книге содержатся главы курса гидродинамики, не нашедшие отражение в существующих учебниках. Приведено решение задачи о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды. Изложена квазидвухслойная теория для течений мелкой воды на ступенчатой границе, учитывающая вертикальную неоднородность горизонтального поля скорости. Приведено решение задачи Римана для течений мелкой воды на ступенчатой границе на основе квазидвухслойной теории. Изложены численные алгоритмы для изучения течений мелкой воды над произвольной подстилающей поверхностью и их обобщение на случай вращающейся мелкой воды и на случай произвольной внешней силы. Книга может быть полезна студентам и аспирантам, специализирующимся в области гидродинамики.

*Ключевые слова:* гидродинамика, сила тяжести, свободная граница, уравнения мелкой воды

## Введение

Задача об обтекании сложной границы течениями тяжелой жидкости со свободной поверхностью в присутствии источников является фундаментальной для моделирования крупномасштабных течений атмосферы и океана. Это, прежде всего, связано с тем, что улучшение разрешения таких моделей делает необходимым учет особенностей рельефа границы и поэтому требует глубокого понимания процессов на малых масштабах и их нетривиального влияния на крупном масштабе. Уравнения Эйлера, полностью описывающие гидродинамику природных и лабораторных течений идеальной жидкости, настолько сложны, что при наличии комплексной границы даже в предположении несжимаемости, баротропности и отсутствии вращения не поддаются численному интегрированию в задачах с достаточно сильным изменением геометрии подстилающей поверхности. По этой причине разработка приближенных моделей и вычислительных методов, альтернативных решению исходных трехмерных уравнений гидродинамики, является актуальной проблемой.

Необходимость редукции исходных уравнений в классе задач со свободной поверхностью привела после предположения гидростатичности распределения давления, усреднения поля скорости по глубине потока и пренебрежения изменением горизонтальных скоростей вдоль линий, коллинеарных вектору силы тяжести, к построению Стокером математической модели более низкого порядка. Впоследствии данная модель была названа моделью «мелкой воды» (*Stoker, 1957; Овсянников, 1973*), поскольку редукция осуществлялась асимптотическим разложением по малому параметру, определяемому отношением глубины жидкости к характерному линейному размеру. При наличии внешнего источника, например, силы Кориолиса, область применения модели не ограничена условием малости глубины жидкости по сравнению с характерными линейными размерами, поскольку в этом случае возможность редукции трехмерных уравнений к двумерным есть следствие вращения, а не тонкости слоя. Уравнения

мелкой воды, являясь системой нелинейных гиперболических уравнений, аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести при пренебрежении эффектами вертикальной неоднородности горизонтального поля скорости.

Уравнения мелкой воды широко используются для описания различных физических явлений. Примером применения двумерных уравнений мелкой воды к атмосферным течениям является классическая работа (*Charney, Fjortoft*, 1950), в которой приближение мелкой воды используется для задач прогноза погоды. Авторы этой работы проинтегрировали гидродинамические уравнения вдоль всей глубины атмосферы, пренебрегая стратификацией плотности и, тем самым, получили двумерные баротропные уравнения. Уравнения мелкой воды применяются для описания крупномасштабных атмосферных течений, где существенны ускорение Кориолиса и его широтные вариации. В частности динамические уравнения работы (*Charney, Fjortoft*, 1950) сформулированы в терминах потенциальной завихренности и функции тока.

Традиционно океанические течения являются важным направлением применения уравнений мелкой воды. Например, в работе (*Hendershott*, 1981) приведены результаты моделирования крупномасштабных течений на всем земном шаре, учитывающие влияние сил, вызываемых воздействием Солнца и Луны. Интересный пример применения приближения мелкой воды приведен в работе (*Nihoul, Rondau*, 1975), в которой решены усредненные уравнения мелкой воды для остаточных циркуляций. Уравнения работы (*Nihoul, Rondau*, 1975) усреднялись по периоду течения, нелинейные члены при таком усреднении описывали суммарный поток импульса (радиационное напряжение), который определяется волновой компонентой течения. Важным приложением уравнений мелкой воды является предсказание штормовой картины, а именно, генерация течений и вариаций уровня воды, вызванных отношением атмосферного давления и напряжением ветра на водной поверхности (*Dube et al.*, 1985; *Johns et al.*, 1982).

Если жидкость расслаивается по причине разной солености, то полученный в результате слоистый поток очень похож на течение мелкой воды. Пример использования многослойной модели мелкой воды приведен в работе (*Garvine*, 1987). Схожая многослойная модель использовалась в работе (*Dowling, Ingersoll*, 1989) для моделирования и описания Большого Красного Пятна в атмосфере Юпитера.

Также следует отметить актуальные применения приближений мелкой воды для описания гидравлических течений, береговых течений, течений в реках и озерах, течений в водозаборниках, технических сужениях и лотках, моделирования цунами, распространения волн прорыва и приливных бор в реках, распространения тяжелых газов и примесей в атмосферах планет, атмосферных движений крупных масштабов, используемых при предсказании погоды.

Нелинейный характер уравнений мелкой воды в случае неоднородной подстилающей поверхности означает, что использование аналитических методов решения может иметь успех только при очень специальных условиях и для их решения приходится использовать численные методы. Гиперболичность уравнений мелкой воды определяет, кроме гладких, наличие и разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время, может привести к разрывному решению. В газовой динамике разрывные решения ассоциируются с ударными волнами и контактными разрывами. В контексте уравнений мелкой воды разрывы связываются с гидравлическими прыжками, сильными приливными течениями с распространением быстрых атмосферных фронтов.

Приближение мелкой воды было разработано для моделирования течений над слабоменяющимся рельефом (*Vreugdenhil*, 1994; *Беликов, Семенов*, 1997). Наличие же препятствий, обусловленных резким изменением подстилающей поверхности, требует разработки альтернативных приближений, учитывающих влияние вертикальной неоднородности течения, возникающего у препятствий, поскольку классические приближения мелкой воды на такой границе нарушаются.

Задача Коши о распаде произвольного разрыва кусочно-постоянных начальных условий, впервые возникшая в газовой динамике (задача Римана) (*Уизем*, 1977; *Ландау, Лифшиц*, 1988), имеет фундаментальное значение. Ее решение облегчает понимание множества нелинейных явлений в течениях несжимаемой жидкости со свободной границей в рамках приближения мелкой воды. Решение такой задачи на ступенчатой границе особенно важно при изучении течений над сложной подстилающей поверхностью, аппроксимируемой системой таких ступенчатых границ. Существующий аналитический подход для решения задачи Римана, основанный на предположении о наличии стационарной зоны в окрестности ступенчатой границы, с одной стороны, не учитывает потери кинетической энергии на турбулентное перемешивание вблизи ступеньки, с другой — накладывает ограничения

на возможные глубины натекающего потока для преодоления ступенчатой границы. Решение этой задачи является важнейшим компонентом в разработке численных методов сквозного счета, основанных как на аналитических, так и на приближенных решениях задачи Римана. Главная идея методов годуновского типа (Годунов, 1988), основанных на решении задачи Римана, состоит в расщеплении решения многомерной задачи на набор одномерных подзадач, возникающих после разбиения расчетной области на ячейки, и записи соответствующих интегральных соотношений для всех элементов (ячеек), посредством которых осуществлялось разбиение. Данные методы особенно часто находят применение в численном моделировании, поскольку позволяют получать решение не только в области непрерывного течения, но и в областях разрыва решений, без специального выделения и отслеживания поверхностей разрыва. Кроме того, эти методы хорошо адаптируются к сложным граничным условиям, характерным для большинства постановок задач, описывающих реальные природные течения.

Для решения многих реальных задач недостаточно учитывать только неоднородность подстилающей поверхности. Необходимость рассмотрения дополнительных воздействий, определяемых конкретными условиями течения, приводит к появлению в системе уравнений мелкой воды дополнительных членов. В частности, для расчета крупномасштабных атмосферных и океанических задач следует принимать во внимание эффекты, определяемые планетарным вращением. Наличие хорошо разработанного и апробированного численного аппарата вкупе с многократно протестированной программной реализацией сделало особенно привлекательным сведение решения задачи о вращающейся «мелкой воде» над ровной подстилающей поверхностью к решению задачи о течениях мелкой воды над комплексной нестационарной границей. Представление силы Кориолиса фиктивной нестационарной границей создает важные преимущества при моделировании течений на неровной границе, благодаря сведению задачи к моделированию течений мелкой воды над нестационарной эффективной поверхностью. Однако применение такого представления в расщепляющихся численных методах затрудняется отсутствием одномерной постановки задач для вращающейся жидкости. Формальная постановка одномерной задачи, определяемой отказом от частных производных по одному из пространственных направлений, делает особенно актуальным нахождение горизонтальной неоднородности тангенциальной составляющей вектора скорости,

определяющей консервативность силы Кориолиса, в зависимости от вертикальной структуры течения.

Данный материал основан на курсе лекций, читаемом доктором физико-математических наук, заведующим теоретическим сектором Учреждения Российской академии наук Института космических исследований РАН (ИКИ РАН), доцентом Московского физико-технического института (Государственного университета) Петросяном А. С. для студентов кафедры космической физики и может служить для них учебным пособием, в котором содержится главы курса гидродинамики, не нашедшие отражение в существующих учебниках. Изложенный материал может быть полезен студентам и аспирантам, специализирующимся в области гидродинамики.

## ГЛАВА 1. Задача Римана для течений мелкой воды над ступенчатым профилем дна

### 1.1. Введение

Задача распада произвольного разрыва для течений мелкой воды над ступенчатым профилем дна является фундаментальной проблемой для изучения нелинейной динамики течений тяжелой жидкости со свободной границей. Решение этой задачи позволяет глубже понимать особенности гидродинамических течений на неоднородных границах. Кроме того, решение этой задачи служит основой для конструирования целого класса численных методов, которые не нуждаются в выделении разрывных решений. Действительно, в случае наличия неоднородной подстилающей поверхности  $z_B(x)$  аппроксимация ее профиля комбинацией кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций сводит задачу к конечному числу систем с неоднородностью вида ступенчатая граница. При этом для горизонтальных границ задача Римана имеет строгое решение, не выходящее за рамки приближений мелкой воды, в то время как на ступенчатой границе становится принципиальным учет вертикальных ускорений вблизи уступа и использование квазидвухслойной теории. Таким образом, основополагающей для расчета потоков мелкой воды над неоднородностями является задача о распаде произвольного разрыва кусочно-постоянных начальных условий над ступенчатой границей — задача Римана.

Задача Коши в случае наличия ступенчатой границы высоты  $a$  задается следующим образом:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{при } x < 0, \\ u_r & \text{при } x > 0; \end{cases}; \quad h(x, 0) = \begin{cases} h_l & \text{при } x < 0, \\ h_r & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

в области  $x \in (-\infty, +\infty)$  и для  $t < 0$  (рис. 1.1).

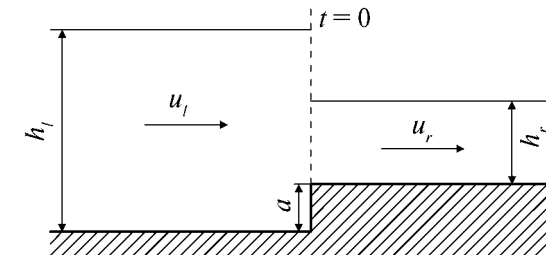


Рис. 1.1. Задача Римана со ступенькой на дне

Разделы 1.2 и 1.3 данной главы посвящены решению задачи о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды и исследованию ограничений, накладываемых условием односвязности области, занимаемой жидкостью около ступеньки, на характер возможных течений. Рассмотрены ограничения на возможные течения в зависимости от направления потока. Найдены все режимы течений, характеризующиеся отношением глубины потока к высоте ступеньки и направлением потока. Получены аналитические выражения для ограничений значений гидродинамических параметров течения в каждом режиме.

Стационарное обтекание ступеньки является частным решением нестационарной задачи о распаде произвольного разрыва над ступенькой (далее «нестационарная задача») (Остапенко, 2002, 2003). Кроме того, для аналитического решения нестационарной задачи предполагается, что всегда над ступенькой есть область стационарности. Поэтому решение стационарной задачи обтекания ступеньки потоком является основой для решения нестационарной задачи. Наличие стационарной зоны было подтверждено как лабораторными экспериментами, так и численными расчетами. В работах (Остапенко, 2002, 2003) была показана единственность решения нестационарной задачи, и, как следствие, ее частного случая — стационарной задачи. Однако уравнения мелкой воды являются приближением уравнений Эйлера для невязкой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести, и, следовательно, наследуют все ограничения, принимаемые при выводе этих уравнений, в частности, условие односвязности области, занимаемой жидкостью в непосредственной близости от ступеньки. В данной работе учет указанного условия позволил обнаружить стационарные режимы течения, отличные от приведённых в работе (Остапенко, 2002).

В разд. 1.4 предложена квазидвухслойная модель для расчета течений мелкой воды вблизи уступа дна, основанная на квазидвухслойной теории мелкой воды. Показано, что при правильном разделении жидкости на два слоя физика процессов в окрестности ступеньки может быть приближенно описана решением классических уравнений мелкой воды со специально подобранными начальными условиями, описывающими взаимодействие слоев. Поскольку в каждый момент времени вводится собственное двухслойное деление, модель была названа квазидвухслойной моделью мелкой воды.

В разд. 1.5 получены все конфигурации, возможные в предположении наличия стационарного перехода вблизи ступенчатой границы, и показано, что в результате качественного учета диссипации поступательной механической энергии как функции крупномасштабных характеристик потока, класс полученных решений расширяется решениями типа прохождения волны разряжения через ступеньку или ее примыкания справа.

В разд. 1.6 приведено численное решение задачи Римана, основанное на классических уравнениях мелкой воды во всей области, исключая окрестность уступа, внутри которой реализована квазидвухслойная модель. Показано, что реализуется автомодельный режим течения распада произвольного разрыва со стационарным скачком вблизи уступа на дне. В разд. 1.7 проведено сравнение с известными численными и точными решениями задачи Римана на ступенчатой границе.

## 1.2. Стационарные уравнения мелкой воды. Области допустимых решений

Система уравнений, описывающая стационарное течение невязкой тяжелой жидкости, имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho V) &= 0, \\ (V \nabla) V &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - g, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность;  $V$  — скорость;  $P$  — давление;  $g$  — ускорение свободного падения.

Граничные условия: условие непротекания и условие на свободной поверхности:

$$\begin{aligned} (V_b, n) &= 0, \\ P_s &= P_A, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $V_b$  — скорость жидкости на дне;  $n$  — нормальный вектор к подстилающей поверхности;  $P_s$  — давление в жидкости на поверхности;  $P_A$  — внешнее давление.

Учитывая, что рассматриваемая жидкость несжимаема и однородна, система (1.2) в двумерном случае переписывается таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \\ V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $x, y$  — декартовы координаты, причем вертикальная ось  $Oy$  направлена в сторону, противоположную направлению силы тяжести.

Модель мелкой воды описывает те течения, в которых глубина жидкости много меньше характерных линейных размеров течения. Предполагается, что давление в жидкости распределено по известному гидростатическому закону:

$$P(y) = P_A + \rho g(h - y), \quad (1.5)$$

где  $h(x)$  — глубина жидкости. Внешнее давление  $P_A$  в (1.5) полагается постоянным вдоль поверхности и равным атмосферному давлению.

Из этого следует малость вертикальных ускорений

$$\frac{dV_y}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

Первое и второе уравнение из (1.4) интегрируются по вертикали

$$\begin{aligned} \int_z^h \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) dy &= 0, \\ \int_z^h \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Граничные условия (1.3) в прямоугольной системе координат записываются так:

$$\frac{V_y(x, y)}{V_x(x, y)} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad y = z, \quad (1.8)$$

$$V_y(x, y) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} V_x(x, y), \quad y = h,$$

где  $z(x)$  — функция, задающая подстилающую поверхность (рис. 1.2).

Используя правило дифференцирования Лейбница, система (1.7) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h V_x dy = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h V_x^2 dy + g(h-z) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Горизонтальная составляющая скорости  $V_x$  представляется в виде суммы средней скорости  $u = \langle V_x \rangle$  и  $V'_x(x, y)$  — отклонения от среднего

$$V_x = u + V'_x(x, y), \quad (1.10)$$

$$\int_z^h V'_x(x, y) dy = 0, \quad u = \frac{1}{h-z} \int_z^h V_x(x, y) dy.$$

Подставляя в (1.9) горизонтальную составляющую скорости (1.10) и предполагая при некотором удалении от ступеньки, что изменение

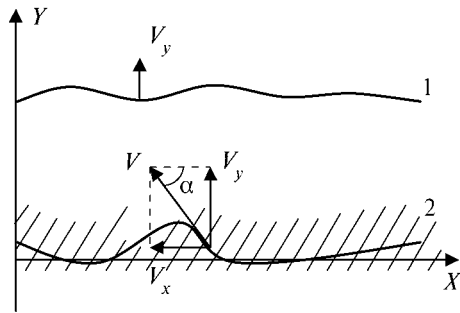


Рис. 1.2. Граничные условия, используемые при интегрировании системы (1.3): 1 —  $h(x)$ ; 2 —  $z(x)$ ;  $V_y = dh(x)/dt$ ;  $\text{tg} \alpha = \partial z / \partial x$

по горизонтали усредненного по высоте квадрата отклонения горизонтальной составляющей скорости от ее среднего значения мало:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h (V'_x)^2 dy \approx 0, \quad (1.11)$$

опираясь на (1.11) систему (1.9) преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} [(h-z)u] = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [(h-z)u^2] + g(h-z) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Введя новую переменную  $h' = h - z$ , отсчитываемую от подстилающей поверхности, опуская штрих, перепишем систему (1.12) в виде

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial(h+z)}{\partial x} = 0.$$

Система (1.13) — одномерные стационарные уравнения Сен-Венана. Частные решения и задача Римана для  $z(x)$ , задаваемой линейной функцией, получены в работах (Karelsky et al., 2000a, b).

В дальнейшем удобнее использовать эквивалентный вид системы (1.13):

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^2}{2} + hg + zg \right] = 0.$$

Интегрируя систему (1.14) по горизонтали ( $z(x)$  считаем кусочно-постоянной), получаем соотношения

$$h_1 u_1 = h_2 u_2, \quad (1.15)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + a,$$

где  $h_1, u_1$  — глубина жидкости и её скорость слева от ступеньки;  $h_2, u_2$  — соответственные параметры справа от ступеньки;  $a$  — высота ступеньки (рис. 1.3).

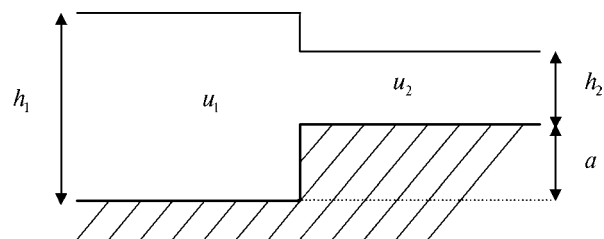


Рис. 1.3. Стационарное решение системы (1.15)

С помощью замены:

$$\begin{aligned} Q &= gq = gh_i u_i, \\ c_i^2 &= gh_i, \\ b^2 &= ga \end{aligned} \quad (1.16)$$

решение системы (1.15) сводится к решению уравнения более высокого порядка

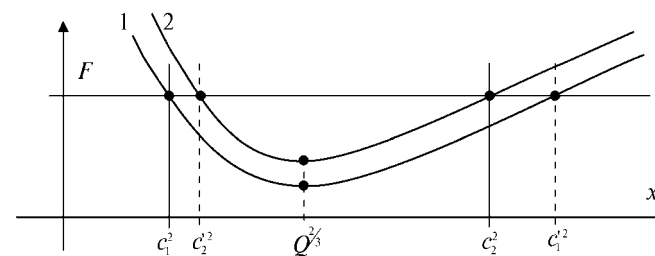
$$c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4} = c_2^2 + \frac{Q^2}{2c_2^4} + b^2, \quad (1.17)$$

где  $c_i$  — скорость поверхностных гравитационных волн,  $b^2$  — приведенная высота ступеньки, и  $Q$  — приведенный поток.

Уравнение (1.17) может быть переписано в виде

$$Q^2 = 2c_1^4 c_2^4 \frac{c_2^2 - c_1^2 + b^2}{c_2^4 - c_1^4}. \quad (1.18)$$

В силу того, что  $Q^2 > 0$ , из (1.18) следует, что если  $c_1^2 > c_2^2$ , то и  $c_1^2 > c_2^2 + b^2$ , т. е. если глубина слева от ступеньки больше, чем глубина справа, то она больше, чем и сумма глубины справа, и высоты ступеньки. Нетрудно показать, что минимум функции  $f(x) = x + Q^2/2x^2$  в области, где параметры уравнения имеют физический смысл, доставляет точка  $x_{\min} = Q^{2/3}$ . Из рис. 1.4 видно, что  $c_1^2$  не может быть равно  $Q^{2/3}$ , а это означает, что слева от ступеньки поток жидкости не может быть звуковым, так как число Фруда  $Fr = u/c = q/hc = (qg)/(cc^2) = Q/c^3$ , и при  $c^2 = Q^{2/3}$   $Fr = 1$ . Это означает, что в рамках приближения модели мелкой воды волна разряже-

Рис. 1.4. Графическая интерпретация решения уравнения (1.17):  
1 —  $F_1(x)$ ; 2 —  $F_2(x)$ 

ния не может проходить через ступеньку ни в одном направлении и примыкать к ней слева. Однако в природе указанные решения наблюдаются, и такие решения были получены численно благодаря использованию квазидвухслойной модели, обеспечивающей диссипацию кинетической энергии на ступеньке.

Для каждого значения потока  $Q$  решением уравнения (1.17) является такой набор значений  $c_1^2$  и  $c_2^2$ , который удовлетворяет условию равенства двух функций:

$$F_1(x) = x + \frac{Q^2}{2x^2}, \quad (1.19)$$

$$F_2(x) = x + \frac{Q^2}{2x^2} + b^2, \quad (1.20)$$

где первая и вторая функции представляют левую и правую части уравнения (1.17).

Решением задачи в работе (Остапенко, 2003) объявлялся один из корней уравнения (1.17). Однако, вследствие того, что при осуществлении выбора игнорировалось условие односвязности области, занимаемой жидкостью в непосредственной близости от ступеньки, в качестве решений использовались значения переменных, выходящие за рамки ограничений, накладываемых физикой процесса, описываемой уравнениями Эйлера. Эти ограничения возникают при выводе уравнений мелкой воды из исходных уравнений гидродинамики несжимаемой идеальной жидкости в поле силы тяжести. В настоящей работе эти ограничения учтены и рассмотрены различные режимы течения совместимые с исходными уравнениями жидкости.



Для выделения неразрывных решений наложим на все решения уравнения (1.17) условие превышения глубиной жидкости слева от ступеньки высоты самой ступеньки:

$$c_1^2 > b^2. \quad (1.21)$$

Именно условие (1.21) в дальнейшем приведет к появлению особых режимов стационарных течений в приближении мелкой воды. Заметим, что если  $F_1(c_1^2) < F_2(x_{\min})$  (см. рис. 1.4), то уравнение (1.17) не имеет решений. Определим связанные с этим ограничения на  $c_1^2$ . Для этого найдем решение уравнения  $F_1(x) = F_2(x_{\min})$ , которое с учетом (1.19) и (1.20) принимает вид

$$x^3 - \left[ \frac{3}{2} Q^{2/3} + b^2 \right] x^2 + \frac{Q^2}{2} = 0. \quad (1.22)$$

Применяя формулы Кардано–Виетта к уравнению вида  $x^3 + \psi x^2 + \varphi = 0$ , получаем выражения для корней:

$$x_1 = \frac{2}{3} \left| \psi \left[ \frac{1}{2} + R \right] \right|, \quad R = \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{27}{2} \frac{\varphi}{|\psi|^3} \right) \right], \quad (1.23)$$

$$x_{2,3} = \frac{2}{3} \left| \psi \left[ \frac{1}{2} + T \right] \right|, \quad T = \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{27}{2} \frac{\varphi}{|\psi|^3} \right) \pm \frac{2\pi}{3} \right]. \quad (1.24)$$

Условие отрицательности определителя уравнения равносильно совокупности следующих условий:

$$\varphi > 0, \quad \psi < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varphi}{|\psi|^3} < \frac{4}{27}. \quad (1.25)$$

Для решений (1.23) и (1.24) справедливо следующее соотношение:

$$x_2 < 0 < x_3 < x_1. \quad (1.26)$$

Вводя обозначения  $K = b^2 + \frac{3}{2} Q^{2/3}$ ,  $\Theta = \frac{1}{3} \arccos \left[ 1 - \frac{27}{4} \frac{Q^2}{K^3} \right]$ , применяя (1.23) и (1.24) к уравнению (1.22) и учитывая (1.26), получаем (рис. 1.5):

$$x_\alpha = \frac{2}{3} K \left[ \frac{1}{2} + \cos \left( \Theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (1.27)$$

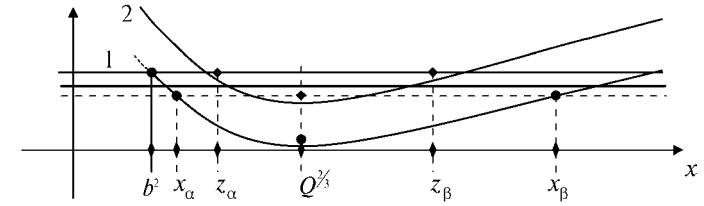


Рис. 1.5. Границы областей различных режимов течения: 1 —  $F_1(x)$ ; 2 —  $F_2(x)$

$$x_\beta = \frac{2}{3} K \left[ b^2 + \frac{1}{2} \cos(\Theta) \right]. \quad (1.28)$$

Корни  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$  существуют при любом соотношении между  $Q$  и  $b^2$ . Таким образом,

$$c_1^2 \in (0, x_\alpha) \cup (x_\beta, +\infty) \quad (1.29)$$

и (1.29) определяет область возможных глубин слева от ступеньки в зависимости от размера ступеньки и величины расхода жидкости.

В связи с тем, что на глубину жидкости до ступеньки наложено ограничение (1.21), возникает ограничение на глубину жидкости после ступеньки: если  $b^2 < x_\alpha$ , что равносильно

$$b^2 < \frac{Q^{2/3}}{\sqrt{3}}, \quad (1.30)$$

то существует решение, при котором течение до ступеньки сверхзвуковое, следовательно,  $c_1^2 \in (b^2, x_\alpha)$ . Ограничения на глубину жидкости после ступеньки получены из решения уравнения

$$F_2(z) = F_1(b^2) \Leftrightarrow z + \frac{Q^2}{2z^2} + b^2 = b^2 + \frac{Q^2}{2b^4}. \quad (1.31)$$

При выполнении (1.30) выполняются условия (1.25), поэтому корни уравнения (1.31) записываются в виде

$$z_\alpha = A \left[ \frac{1}{2} + \cos \left( \Omega - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (1.32)$$

$$z_\beta = A \left[ \frac{1}{2} + \cos(\Omega) \right], \quad (1.33)$$

где  $\Omega = \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - 54 \frac{b^{12}}{Q^4} \right)$ ,  $A = \frac{1}{3} \frac{Q^2}{b^4}$ , т. е. при условии (1.30), если  $c_1^2 \in (b^2, x_\alpha)$ , то

$$c_2^2 \in (z_\alpha, z_\beta). \quad (1.34)$$

и (1.32)–(1.34) фиксирует область возможных глубин справа от ступеньки.

Если известен поток  $Q$ , и глубина жидкости до ступеньки, то глубина после ступеньки находится из уравнения:

$$F_2(c_2^2) = F_1(c_1^2) \Leftrightarrow c_2^2 + \frac{Q^2}{2c_2^4} + b^2 = c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4}. \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) имеет решения:

$$c_{2\alpha}^2 = B \left( \frac{1}{2} + \cos \left( \Psi - \frac{2\pi}{3} \right) \right), \quad (1.36)$$

$$c_{2\beta}^2 = B \left( \frac{1}{2} + \cos(\Psi) \right). \quad (1.37)$$

В (1.36), (1.37) использованы обозначения:  $B = \frac{2}{3} \left( c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4} - b^2 \right)$ ,  $\Psi = \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{27}{4} \frac{Q^2}{Z} \right)$ ,  $Z = \left( c_1^2 + \frac{Q^2}{2c_1^4} - b^2 \right)^3$ .

### 1.3. Анализ возможных стационарных режимов обтекания ступеньки

Объединяя полученные решения, получаем три режима течения, которые характеризуются соотношением между величиной потока и высотой ступеньки:

- 1) дозвуковой поток до ступеньки, сверхзвуковой или дозвуковой поток после ступеньки. Этот режим реализуется при любых  $Q$  и  $b$ , при условии  $h_1 > h_2 + a$ . Заметим, что для этого режима существует два случая реализации потока после ступеньки: сверхзвуковой и дозвуковой;

- 2) сверхзвуковой поток до ступеньки, сверхзвуковой или дозвуковой поток после ступеньки. Этот режим реализуется при  $b^2 < Q^{2/3} / \sqrt{3}$ , когда  $h_1 > a$  и  $h_1 < h_2$ ;
- 3) сверхзвуковой поток до ступеньки, звуковой поток после ступеньки (критический режим); этот режим реализуется при  $b^2 = Q^{2/3} / \sqrt{3} = gh_1$  и  $gh_2 = Q^{2/3}$ .

Однако предположение (1.21) привело к потере решений, в которых сверхзвуковой поток натекает на ступеньку и глубина потока до ступеньки меньше, чем высота ступеньки, поскольку при разбиении течений на режимы выше не учитывалось направление потока. Из опыта известно, что существуют стационарные течения, в которых поток жидкости полностью обтекает препятствия, возвышающиеся над средним уровнем жидкости. В рамках данной модели это соответствует повышению уровня жидкости за счет торможения потока, обусловленного совершением ступенькой работы над потоком. Течение перед ступенькой становится дозвуковым, а его глубина — больше, чем высота ступеньки. Уравнение (1.17) допускает переход потока из сверхзвукового в дозвуковой до ступеньки, что означает возникновение стоячей ударной волны слева от ступеньки. Поскольку указанное течение реализуется в каждом режиме, то для нахождения полного решения будет достаточным добавить вторую неподвижную ударную волну в качестве отдельного режима с учетом направления потока. Следовательно, полное решение выглядит таким образом

- 1)  $c_1^2 \in [x_\beta, +\infty)$ ,  $c_2^2(c_1^2) = c_{2\alpha}^2 < Q^{2/3} \vee c_2^2(c_1^2) = c_{2\beta}^2 > Q^{2/3}$ ,  $\forall Q, b$ ,
- 2)  $c_1^2 \in (b^2, x_\alpha]$ ,  $c_2^2 \in (z_\alpha, z_\beta)$ ,  $c_2^2(c_1^2) = c_{2\alpha}^2 < Q^{2/3} \vee c_2^2(c_1^2) = c_{2\beta}^2 > Q^{2/3}$ ,  $b^2 < \frac{Q^{2/3}}{\sqrt{3}}$ ,  $\forall Q$ ,
- 3)  $b^2 = \frac{Q^{2/3}}{\sqrt{3}} = c_1^2 = x_\alpha$ ,  $c_2^2 = Q^{2/3} = z_\alpha = z_\beta$ ,
- 4)  $c_1^2 \in (0, \min(x_\beta, b^2)]$ ,  $c_2^2(c_1^2) = c_{2\alpha}^2 < Q^{2/3} \vee c_2^2(c_1^2) = c_{2\beta}^2 > Q^{2/3}$ ,  $Q > 0$ .

Выше было физически обосновано решение, включающее стоячую ударную волну слева от ступеньки, для потока, глубина которого меньше высоты ступеньки. Но уравнению (1.17) будет удовлетворять

и решение, которое включает несколько ударных волн слева от ступеньки.

Так как с точки зрения уравнения (1.17) область над ступенькой справа по своим свойствам не отличается от области слева, то точно также могут возникнуть стоячие ударные волны справа от ступеньки.

Поскольку реальные течения устойчивы к малому изменению высоты ступеньки, то течение при  $h_1 = a - \varepsilon$  будет мало отличаться от течения при  $h_1 = a + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll a$ . Следовательно, стоячая ударная волна до и(или) после ступеньки может входить в решение и тогда, когда глубина потока больше высоты ступеньки, что не противоречит уравнению (1.17). Тогда аналогичные рассуждения возможно применить к течениям, глубина жидкости в которых до ступеньки больше, чем высота ступеньки, и поток жидкости направлен не только на ступеньку, но и от ступеньки.

Таким образом, существует два типа неоднозначности решения задачи. Первый тип — неоднозначность, обусловленная существованием двух решений задачи с одними и теми же параметрами течения слева (или справа). Второй тип — неоднозначность, вызванная тем, что уравнения допускают переход потока из сверхзвукового в дозвуковой неограниченное количество раз как до ступеньки, так и после нее. Неоднозначности обоих типов являются недостатком модели.

Для того чтобы перевести поток из дозвукового в сверхзвуковой, нужно совершить над ним положительную работу, т. е. разогнать. Для перевода потока из сверхзвукового в дозвуковой необходимо его затормозить, т. е. совершить над ним отрицательную работу. Поскольку без совершения работы поток ни разогнаться, ни затормозиться не может, а единственным источником работы является ступенька, то изменение режима течения при натекании жидкости на ступеньку будет обуславливаться исключительно переходом потока из сверхзвукового в дозвуковой. При стекании жидкости со ступеньки поток не может перейти после ступеньки из дозвукового в сверхзвуковой, поскольку взаимодействие со ступенькой — единственное вынуждающее воздействие, способное обеспечить соответствующее ускорение. Аналогично решается вопрос о каскаде ударных волн. Несмотря на то, что уравнения допускают переход потока до ступеньки из сверхзвукового в дозвуковой неограниченное число раз, физически осмысленным будет лишь переход, обусловленный торможением потока о ступеньку. Это означает, что вторая стоячая ударная волна может возникать только при положительном направлении течения. Таким образом, неоднозначность второго типа также является устранимой.

В приведенном выше полном решении задачи с учетом направления потока для каждой области значений глубины жидкости до ступеньки существует два значения глубины жидкости после ступеньки, которые соответствуют дозвуковому и сверхзвуковому течениям (неоднозначность первого типа). Из двух возможных корней уравнения физически осмысленному решению задачи ставится в соответствие одно: если поток до ступеньки сверхзвуковой и глубина незначительно отличается от высоты ступеньки, то ступенька для него будет являться существенным препятствием, достаточным для перехода в дозвуковой режим. В этом случае реализуется дозвуковое решение справа от ступеньки. Если же поток до ступеньки сверхзвуковой и его глубина много больше высоты ступеньки, то ступенька будет являться несущественным препятствием, оставляя поток по-прежнему сверхзвуковым и после ступеньки. Тогда выбирается сверхзвуковое решение справа от ступеньки. Таким образом, разрешается неоднозначность первого типа в случаях существенного и несущественного влияния ступеньки.

Полезно отметить, что в работе (Alcrudo, Benkhaldoun, 2001) косвенно осуществляется аналогичный выбор решения в предположении того, что волновая картина в нижнем слое жидкости, для которого ступенька может рассматриваться как непротекаемая граница, формируется много быстрее, чем в верхнем слое. Это соответствует выбору дозвукового решения после ступеньки и, соответственно существенному влиянию ступеньки на поток, т. е. размер ступеньки сравним с глубиной жидкости. Ситуации значительного превышения глубиной жидкости высоты ступеньки (т. е. несущественного влияния ступеньки на поток) будет соответствовать предположение, что волновая картина в верхнем слое формируется быстрее, чем в нижнем. Результаты, полученные численно, оправдывают такой выбор решений (Карельский др., 2004).

Однако проблема с выбором решения справа от ступеньки, когда глубина потока слева превышает высоту ступеньки на величины порядка самой ступеньки, остается открытой. Это особенно актуально при решении полной нестационарной задачи о распаде произвольно-го разрыва над ступенькой.

Недостатки модели (а именно, неединственность решения и невозможность прохождения ударной волны через ступеньку и примыкания к ступеньке) являются следствием того, что при выводе уравнений мелкой воды было предположено гидростатическое распределение давления в жидкости и в уравнениях (1.9) было пренебрежено

слагаемым (1.11), отвечающим за изменение по горизонтали усредненного по высоте отклонения горизонтальной скорости от ее среднего значения. В дальнейшем планируется учесть эти слагаемые в уравнениях путем приближения их известными функциями и решать уточненные уравнения.

#### 1.4. Формулировка квазидвухслойной модели течений на уступе дна

В этом разделе приведен вывод двухслойных уравнений мелкой воды из исходных уравнений Эйлера для несжимаемой однородной жидкости в поле силы тяжести со свободной границей, используемых для построения квазидвухслойной модели вблизи ступенчатой границы.

Будем рассматривать двумерную задачу для уравнений неразрывности и Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

со следующими граничными условиями равенства нулю нормальной составляющей скорости на дне:

$$\begin{aligned} V_z|_{z=z_B} &= \frac{\partial z_B}{\partial t}, \\ V_x|_{z=z_B} &= \frac{\partial z_B}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.39)$$

и условиями на свободной поверхности:

$$V_z|_{z=h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} V_x|_{z=h}. \quad (1.40)$$

Представим слой жидкости глубины  $h$  как два влияющих друг на друга слоя  $h = h_1 + h_2$ . Влияние верхнего слоя на нижний определяется создаваемым им дополнительным давлением  $\rho g h_2$ , в общем случае зависящим от координаты  $x$ . Влияние же нижнего слоя на верхний целиком определится значением высоты нижнего слоя  $h_1$ , представляющим собой для верхнего слоя профиль подстилающей поверхности.

Учитывая, что давление в жидкости распределено гидростатически, а внешнее давление  $P_A$  мы полагаем постоянным:  $p(z) = P_A + \rho g(h - z) \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0$ .

Далее, без ограничения общности, будем полагать значение плотности равным единице. Подставляя полученное выражение в третье уравнение системы (1.38), заметим:  $\frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \approx 0$ , и, следовательно, третье уравнение системы вырождается в требование равенства нулю вертикальных ускорений.

Традиционный вывод уравнений мелкой воды состоит в нахождении уравнений осредненных по глубине течений жидкости. Поскольку для первого уравнения и для первых трех членов второго уравнения системы (1.38) интегрирование по каждому слою совпадает с точностью до обозначений, проведем общие рассуждения по обоим уравнениям за исключением четвертого члена второго уравнения системы (1.38), для которого интегрирование будем осуществлять по каждому слою отдельно.

Проведя операцию усреднения по глубине, получим

$$\begin{cases} \int_{z_B}^h \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dz = 0, \\ \int_{z_B}^h \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dz = 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Используя правило дифференцирования Лейбница:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{a(x)} f(x, z) dz = \int_{b(x)}^{a(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + f|_a \frac{\partial a}{\partial x} - f|_b \frac{\partial b}{\partial x},$$

преобразуем первое уравнение системы (1.41) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_{z_B}^h \frac{\partial V_x}{\partial x} dz + V_z|_{z_B}^h &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h V_x dz - V_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + V_x|_{z=z_B} \frac{\partial z}{\partial x} + V_z|_{z=h} - V_z|_{z=z_B}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

тогда, с использованием граничных условий (1.39), (1.40), выражение (1.42) может быть представлено как:

$$\int_{z_B}^h \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h V_x dz - V_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + V_x|_{z=z_B} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} V_x|_{z=h} - \frac{\partial z}{\partial x} V_x|_{z=z_B} = 0. \quad (1.43)$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h V_x dz + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (1.44)$$

Аналогично преобразуем второе уравнение системы (1.41). Ниже, для упрощения записи, преобразования будем проводить для каждого слагаемого отдельно. Преобразуем первый член уравнения к виду:

$$\int_{z_B}^h \frac{\partial V_x}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_B}^h V_x dz - V_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} + V_x|_{z=z_B} \frac{\partial z_B}{\partial t}.$$

Используя граничные условия (1.39), (1.40) для предпоследнего слагаемого и учитывая, что  $\frac{\partial z_B}{\partial t} = 0$ , получим:

$$\int_{z_B}^h \frac{\partial V_x}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_B}^h V_x dz - \left( V_x|_{z=h} \right) \left( V_z|_{z=h} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} \left( V_x|_{z=h} \right)^2.$$

Преобразование второго и третьего членов уравнения дает:

$$\int_{z_B}^h \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) dz = \int_{z_B}^h V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dz + \int_{z_B}^h \frac{\partial (V_x V_z)}{\partial z} dz - \int_{z_B}^h V_x \frac{\partial V_z}{\partial z} dz.$$

С учетом уравнения (1.43) в последнем слагаемом имеем:

$$\int_{z_B}^h \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) dz = \int_{z_B}^h V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dz + \int_{z_B}^h \frac{\partial (V_x V_z)}{\partial z} dz + \int_{z_B}^h V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dz.$$

Далее, вынося частные производные за знак интеграла, используя правило дифференцирования Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{z_B}^h V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dz + \int_{z_B}^h \frac{\partial (V_x V_z)}{\partial z} dz + \int_{z_B}^h V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dz = \\ & = \int_{z_0}^h \frac{\partial (V_x^2)}{\partial x} dz + \int_{z_B}^h \frac{\partial (V_x V_z)}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h V_x^2 dz - \left( V_x|_{z=h} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \\ & + \left( V_x|_{y=z} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \left( V_x|_{z=h} \right) \left( V_z|_{z=h} \right) - \left( V_x|_{z=z_B} \right) \left( V_z|_{z=z_B} \right), \end{aligned}$$

для последнего слагаемого с учетом граничных условий (1.39), (1.40) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h V_x^2 dz - \left( V_x|_{z=h} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \left( V_x|_{z=z_B} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \left( V_x|_{z=h} \right) \left( V_z|_{z=h} \right) - \\ & - \frac{\partial z}{\partial x} \left( V_x|_{z=z_B} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h V_x^2 dz - \left( V_x|_{z=h} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \left( V_x|_{z=h} \right) \left( V_z|_{z=h} \right). \end{aligned}$$

Преобразование четвертого слагаемого во втором уравнении системы (1.41) проведем по каждому слою отдельно.

Для нижнего слоя:

$$\int_{z_B}^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h P dz - P|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + P|_{z=z_B} \frac{\partial z_B}{\partial x} \right] = 0.$$

Поскольку  $P|_{z=h_1} = \rho g h_2 + P_A$  на всей поверхности  $z = h_1$  (т. е.

$\forall x \frac{\partial P|_{z=h_1}}{\partial x} = \rho g \frac{\partial}{\partial x} h_2$ ), следовательно:

$$\begin{aligned} & \int_{z_B}^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^h (P_A + \rho g h_2 + \rho g (h_1 - z)) dz - (P_A + \rho g h_2) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} (P_A + \rho g h_2 + \rho g (h_1 - z_B)) \frac{\partial z_B}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части предыдущего выражения (1.45) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} (P_A + \rho g h_2 + \rho g (h_1 - z)) dz = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} (P_A + \rho g h_2 + \rho g (h_1 - z)) dz = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( P_A z + \rho g h_2 z + \rho g \left( h_1 z - \frac{z^2}{2} \right) \right) \Big|_{z_B}^{h_1} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( P_A h_1 + \rho g h_2 h_1 + \rho g \left( h_1^2 - \frac{h_1^2}{2} \right) - P_A z_B - \rho g h_2 z_B - \rho g \left( h_1 z_B - \frac{z_B^2}{2} \right) \right) = \\
& = \left( P_A z + \rho g h_2 z + \rho g \left( h_1 z - \frac{z^2}{2} \right) \right) \Big|_{z_B}^{h_1} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( P_A h_1 + \rho g h_2 h_1 + \rho g \left( h_1^2 - \frac{h_1^2}{2} \right) - P_A z_B - \rho g h_2 z_B - \rho g \left( h_1 z_B - \frac{z_B^2}{2} \right) \right) = \\
& = P_A \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - P_A \frac{\partial z_B}{\partial x} - \rho g h_2 \frac{\partial z_B}{\partial x} - \\
& - \rho g z_B \frac{\partial h_2}{\partial x} - \rho g h_1 \frac{\partial z_B}{\partial x} - \rho g z_B \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g z_B \frac{\partial z_B}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Тогда выражение (1.45) запишется так:

$$\begin{aligned}
& \int_{z_B}^{h_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \\
& = \frac{1}{\rho} \left[ P_A \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - P_A \frac{\partial z_B}{\partial x} - \right. \\
& \left. - \rho g h_2 \frac{\partial z_B}{\partial x} - \rho g z_B \frac{\partial h_2}{\partial x} - \rho g h_1 \frac{\partial z_B}{\partial x} - \rho g z_B \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g z_B \frac{\partial z_B}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[ -P_A \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + P_A \frac{\partial z_B}{\partial x} + \rho g h_2 \frac{\partial z_B}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial z_B}{\partial x} - \rho g z_B \frac{\partial z_B}{\partial x} \right] = \\
& = g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_1}{\partial x} + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_2}{\partial x}. \tag{1.46}
\end{aligned}$$

Аналогично преобразуем последнее слагаемое второго уравнения для верхнего слоя:

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} P dz - P \Big|_{z=h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} + P \Big|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] = 0.$$

Полагая  $P \Big|_{z=h_2} = P_A$  на всей поверхности (т. е.  $\forall x \frac{\partial P_A}{\partial x} = 0$ ), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \\
& = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (P_A + \rho g (h_2 - z)) dz - P_A \frac{\partial h_2}{\partial x} + (P_A + \rho g (h_2 - h_1)) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] = 0. \tag{1.47}
\end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (1.47) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (P_A + \rho g (h_2 - z)) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left( P_A z + \rho g \left( h_2 z - \frac{z^2}{2} \right) \right) \Big|_{h_1}^{h_2} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( P_A h_2 + \rho g \left( h_2^2 - \frac{h_2^2}{2} \right) - P_A h_1 - \rho g \left( h_2 h_1 - \frac{h_1^2}{2} \right) \right) = \\
& = P_A \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho g h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - P_A \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Тогда выражение (1.47) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
& \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \\
& = \frac{1}{\rho} \left[ P_A \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho g h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - P_A \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[ -P_A \frac{\partial h_2}{\partial x} + P_A \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] = \\
& = g(h_2 - h_1) \frac{\partial h_2}{\partial x}. \tag{1.48}
\end{aligned}$$

Таким образом, для нижнего слоя второе уравнение системы (1.41) после преобразования имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_B}^{h_1} V_x \, dz - \left( V_x \Big|_{z=h_1} \right) \left( V_z \Big|_{z=h_1} \right) + \frac{\partial h_1}{\partial x} \left( V_x \Big|_{z=h_1} \right)^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} V_x^2 \, dz - \left( V_x \Big|_{z=h_1} \right)^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \left( V_x \Big|_{z=h_1} \right) \left( V_z \Big|_{z=h_1} \right) + \\ & + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_1}{\partial x} + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

и, после упрощения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_B}^{h_1} V_x \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} V_x^2 \, dz + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_1}{\partial x} + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0. \quad (1.49)$$

Аналогично для верхнего слоя:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} V_x \, dz - \left( V_x \Big|_{z=h_2} \right) \left( V_z \Big|_{z=h_2} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( V_x \Big|_{z=h_2} \right)^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} V_x^2 \, dz - \left( V_x \Big|_{z=h_2} \right)^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \left( V_x \Big|_{z=h_2} \right) \left( V_z \Big|_{z=h_2} \right) + \\ & + g(h_2 - h_1) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

или, приводя подобные слагаемые:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} V_x \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} V_x^2 \, dz + g(h_2 - h_1) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0. \quad (1.50)$$

Следовательно, преобразованные системы запишутся в следующем виде:

для нижнего слоя

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} V_x \, dz + \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_B}^{h_1} V_x \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} V_x^2 \, dz + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_1}{\partial x} + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1.51)$$

для верхнего слоя

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} V_x \, dz + \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} V_x \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} V_x^2 \, dz + g(h_2 - h_1) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.52)$$

Обозначая среднюю скорость в нижнем слое

$$u_1 = \frac{1}{h_1 - z_B} \int_{z_B}^{h_1} V_x(x, z, t) \, dz,$$

представим:

$$V_x = \frac{1}{h_1 - z_B} \int_{z_B}^{h_1} V_x(x, z, t) \, dz + V'_x(x, z, t) \quad (\text{где } \int_{z_0}^h V'_x(x, z, t) \, dz = 0),$$

$$V_x = u_1 + V'_x(x, z, t),$$

Получаем

$$\int_{z_B}^{h_1} V_x \, dz = (h_1 - z_B) u_1, \quad (1.53)$$

$$\int_{z_B}^{h_1} V_x^2 \, dz = \int_{z_B}^{h_1} \left( u_1^2 + (V'_x)^2 + 2u_1 V'_x \right) dz = (h_1 - z_B) u_1^2 + \int_{z_B}^{h_1} (V'_x)^2 \, dz. \quad (1.54)$$

Пренебрегая изменением по  $x$  интеграла по высоте от квадрата отклонения горизонтальной скорости:  $\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_B}^{h_1} (V'_x)^2 \, dz \approx 0$ , получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [(h_1 - z_B) u_1] + \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} [(h_1 - z_B) u_1] + \frac{\partial}{\partial x} [(h_1 - z_B) u_1^2] + \\ + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_1}{\partial x} + g(h_1 - z_B) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.55)$$

Введем  $\tilde{h} = h_1 - z_B$ , учтем, что  $\frac{\partial z_B}{\partial t} = 0$ , и обратно переобозначим,  $h_1 = \tilde{h}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 u_1^2)}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial(h_1 + z_B)}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial(h_2)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1.56)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial\left(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2\right)}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial z_B}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Аналогично, полагая для верхнего слоя  $u_2 = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} V_x(x, z, t) dz$ ,

представим горизонтальную скорость как сумму среднего и отклонения:  $V_x = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} V_x(x, z, t) dz + V'_x(x, z, t)$  (где  $\int_z^h V'_x(x, z, t) dz = 0$ ), или

$V_x = u_2 + V'_x(x, z, t)$ , и, таким образом, получаем:

$$\int_{h_1}^{h_2} V_x dz = (h_2 - h_1) u_2,$$

$$\int_{h_1}^{h_2} V_x^2 dz = \int_{h_1}^{h_2} \left[ u_2^2 + (V'_x)^2 + 2u_2 V'_x \right] dz = (h_2 - h_1) u_2^2 + \int_{h_1}^{h_2} (V'_x)^2 dz.$$

Пренебрегая изменением по  $X$  зависимости горизонтальной скорости от высоты:  $\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (V'_x)^2 dz \approx 0$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (V'_x)^2 dz \approx 0, \text{ получаем}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [(h_2 - h_1) u_2] + \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} [(h_2 - h_1) u_2] + \frac{\partial}{\partial x} [(h_2 - h_1) u_2^2] + g(h_2 - h_1) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.57)$$

Переобозначим  $\tilde{h}_2 = h_2 - h_1$  и сразу опустим тильду  $h_2 = \tilde{h}$ , тогда окончательно получаем систему уравнений, описывающую двухслойную однородную жидкость в поле силы тяжести для верхнего слоя:

$$\begin{cases} \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial\left(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2\right)}{\partial x} + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.58)$$

После элементарных преобразований уравнений (1.57) и (1.58) будем иметь уравнения, описывающие двухслойную мелкую воду:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right] + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right] + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.59)$$

Основная идея квазидвухслойной модели течения мелкой воды над ступенчатой границей состоит в следующем. Рассмотрим поток мелкой воды без трения над ступенькой высоты  $a$ , которую можно полагать без потери общности повернутой налево (рис. 1.6).

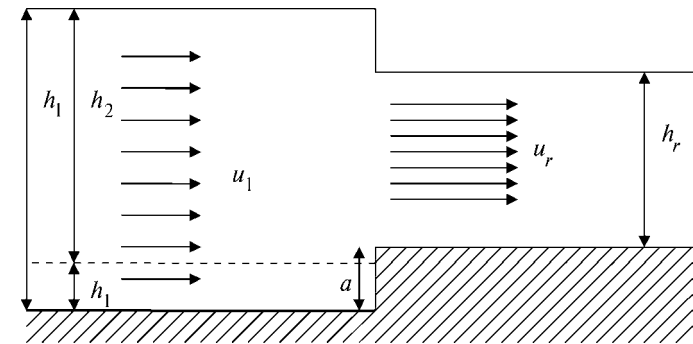


Рис. 1.6. Поток мелкой воды через ступеньку



Если предположить, что высота жидкости была бы ниже ступеньки, то ступенька играла бы для нижнего слоя роль непротекаемой границы. Таким образом, если высота жидкости больше высоты ступеньки, возможно рассмотреть два слоя жидкости: нижний с параметрами потока  $h_1$  и  $u_1$ , для которого ступенька является непротекаемой границей, и верхний с параметрами потока  $h_2$  и  $u_2$ , для которого отсутствует прямое влияние ступеньки. Направим координатную ось  $X$  перпендикулярно соответствующей ступеньке, выбирая начало отсчета в точке пересечения оси с гранью ячейки. Сами ячейки полагаются полубесконечными, а скорости  $u_1$  и  $u_2$  — в обоих слоях левой ячейки, совпадающими в начальный момент. Жидкость в правой ячейке при этом считается однослойной, поскольку фактически в правую ячейку попадает только верхний слой левой ячейки. Очевидно,  $h_1 = h_1 + h_2$ . Уравнения, описывающие двухслойную мелкую воду:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2\right) + g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2\right) + g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.60)$$

с соответствующим для нашего случая граничным условием  $u_1 = 0$  при  $x = 0, t \geq 0$  (ступенька влияет на высоту и скорость нижнего слоя у ступеньки) и начальными условиями:

$$\begin{cases} h_1 = h^*, & h_2 = h_1 - h^*, & u_1 = u_l, & u_2 = u_l & \text{при } x \leq 0, \\ h_2 = h_r, & u_2 = u_r, & & & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (1.61)$$

Предположение о том, что формирование волновой картины в нижнем слое происходит много быстрее, чем в верхнем, позволяет разделить жидкость на слои так, что нижний слой, взаимодействуя со ступенькой, приходит в состояние покоя и образует с ней единую горизонтальную плоскость. Тогда возможно пренебречь членом  $g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}$  в третьем уравнении системы (1.60) и, выбирая временной шаг так, что верхний слой не успеет оказать существенного влияния на нижний, пренебречь членом  $g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}$ . Влияние нижнего

слоя на верхний будет учтено за счет изменения начального условия  $h_2 = h_1 - h^*$ ,  $x \leq 0$ , определяемого изменением глубины нижнего слоя при торможении на ступеньке. Как будет подтверждено ниже численными расчетами, эти предположения позволяют адекватно описать формирующееся течение. Адекватность в данном случае следует понимать как соответствие численных результатов теоретически возможным при аналитическом решении задачи распада произвольно разрыва над ступенькой. Хотя полное аналитическое решение на сегодняшний момент еще не получено, все возможные течения при таком подходе известны. Они могут быть перечислены, исходя из известных частных решений для уравнений мелкой воды на ровной плоскости: центрированные волны Римана, обращенные вперед и назад, гидродинамические прыжки в обоих направлениях, с учетом зоны стационарности в непосредственной близости от ступеньки (*Alcrudo, Benkhaldoun, 2001; Карельский и др., 2004*). Следует обратить внимание, что предполагаемое в аналитическом подходе наличие зоны стационарности нарушает условия теоремы Цемплена, а это приводит к возможности существования полных решений, состоящих из четырех частных решений, включая стационарное решение в окрестности ступеньки. В классическом распаде разрыва в полном решении может присутствовать не более двух частных решений (*Рождественский, Яненко, 1978; Куликовский и др., 2001*).

Таким образом, в рамках указанных предположений, имеем квазидвухслойную модель, описываемую следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2\right) = 0, \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\begin{cases} h_1 = h^* & \text{при } x \leq 0, t = 0, \\ u_1 = u_l & \text{при } x \leq 0, t = 0, \\ u_1 = 0 & \text{при } x = 0, t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2\right) = 0, \end{cases} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} h_2 &= h_l - h^* & \text{при } x \leq 0, t = 0, \\ h_2 &= h_r & \text{при } x > 0, t = 0, \\ u_2 &= u_l & \text{при } x \leq 0, t = 0, \\ u_2 &= u_r & \text{при } x > 0, t = 0. \end{aligned}$$

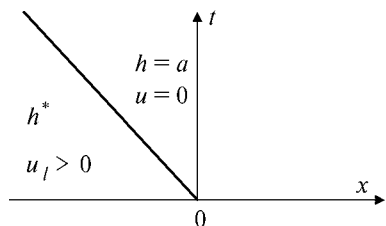
Как несложно видеть, теперь переменные  $h_1$  и  $u_1$ , и  $h_2$  и  $u_2$  связаны только через начальный параметр  $h^*$ , который необходимо выбрать таким образом, чтобы непосредственно на ступеньке высота нижнего слоя совпадала с высотой ступеньки  $h_1|_{x=0} = a$ . Следовательно, проблема нахождения значения  $h^*$  сводится к решению обратной задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2\right) = 0, \end{cases} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= h^* & \text{при } x < 0, t = 0, \\ u_1 &= u_l & \text{при } x \leq 0, t = 0, \\ u_1 &= 0 & \text{при } x = 0, t \geq 0, \\ h_1 &= a & \text{при } x = 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

В зависимости от знака скорости  $u_l$  (случай равенства нулю является тривиальным: нетрудно видеть, что при  $u_l = 0$   $h^* = a$ ) решение задачи разделяется на два принципиально различных случая:

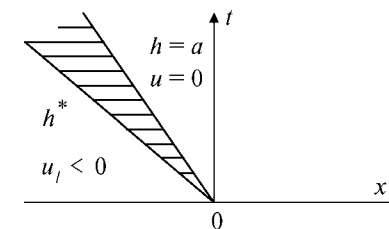
1.  $u_l > 0$  (рис. 1.7), картина течения имеет вид отраженной влево ударной волны, слева от которой параметры потока  $h^*$  и  $u_l > 0$ , а справа жидкость покоится и ее глубина равна высоте ступеньки, т. е.  $h = a$  и  $u = 0$ .



Решение определяется непосредственно из следующей алгебраической формулы, вытекающей

**Рис. 1.7.** Вид задачи о распаде произвольного разрыва в случае положительной скорости натекания на ступеньку  $u_l$  (ударная волна)

**Рис. 1.8.** Вид задачи о распаде произвольного разрыва в случае отрицательной скорости  $u_l$  (волна разрежения)



из соотношений Гюгонио на ударной волне (Рождественский, Яненко, 1978; Куликовский и др., 2001):

$$u_l = (a - h^*) \sqrt{\frac{g(a + h^*)}{2ah^*}}. \quad (1.65)$$

2.  $u_l < 0$  (рис. 1.8), картина течения имеет вид уходящей влево волны разрежения, слева от которой параметры потока  $h^*$  и  $u_l < 0$ , а справа  $h = a$  и  $u = 0$ :

Решение определяется из постоянства соответствующего инварианта Римана, описывающего волну разрежения:

$$h^* = \frac{1}{g} \left( \sqrt{ga} - \frac{1}{2} u_l \right)^2. \quad (1.66)$$

Особо следует выделить случай вырождения верхнего слоя, когда  $h^*$  лежит вне интервала  $(0, h_l]$ . Физически это означает либо равенство нулю глубины  $h^* = 0$  и, следовательно, отсутствие нижнего слоя, а вместе с ним жидкости и/или изменения высоты подстилающей поверхности, либо полное торможение потока слева при  $h^* > h_l$ , когда подстилающая поверхность является непротекаемой границей для всей жидкости слева, и таким образом, следует принять  $h_2 = 0$  при  $x < 0$ . Тогда значение  $h_1$  при  $x = 0$  может быть найдено как решение задачи о взаимодействии с непротекаемой границей всей жидкости, находящейся слева.

Найденное значение  $h^*$  позволяет определить искомые значения потоковых величин: для  $x \leq 0$  имеем:  $h_1 = h^*$  и  $h_2 = h_l - h^*$ . Условием устойчивости в данном случае будет являться стандартное условие Куранта – Фридрихса, в котором, однако, должна учитываться скорость распространения возмущений, в том числе и в фиктивном нижнем слое. То есть шаг по времени не может превышать минимальное по всем ячейкам время, за которое возмущения проходят половину ячейки.

Для проверки предложенной модели был использован численный метод, разработанный на основе метода Годунова, удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) единообразие построения решения как в областях со сложной геометрией подстилающей поверхности, так и в областях ровного дна;
- 2) экономичность при работе с большими расчетными областями по пространству и с длительными временами;
- 3) физичность — диссипативный характер влияния ступенчатой границы на поток жидкости;
- 4) универсальность — возможность добавления разнообразных стоков, массовых источников, трения.

При численном моделировании использовалась неподвижная однородная сетка. Пересчет переменных на соседних временных слоях осуществлялся на основе метода Годунова, использующего процедуру расчета распада произвольного разрыва на гранях ячеек. На гранях ячеек, не примыкающих к ступеньке, классический метод Годунова применялся без изменений. Для грани, вплотную примыкающей к ступеньке, была реализована процедура расчета, описанная в предыдущем разделе. Разработанная одномерная конечно-разностная схема для уравнений мелкой воды имеет следующий вид (подробный вывод конечно-разностной схемы представлен в разд. 2.2, данная одномерная конечно-разностная схема является ее частным случаем)

$$H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \times \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X},$$

$$U_x^{t+1} = \frac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}} + \tau \times \frac{\left( \frac{1}{2} g \left( H_{x-1/2}^t \right)^2 + H_{x-1/2}^t \left( U_{x-1/2}^t \right)^2 - \left( -\frac{1}{2} g \left( H_{x+1/2}^t + i \times a \right)^2 - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t \right) \right)}{X H_x^{t+1}}, \quad (1.67)$$

где  $\tau$  — шаг по времени;  $X$  — шаг по пространству;  $H$  — глубина жидкости;  $U$  — горизонтальная скорость. Нижний индекс  $x$  показывает, что значение функции берется в центре масс ячейки с номером  $x$ . Полуцелые индексы  $x \pm 1/2$  обозначают значения функции на границе между ячейками с номерами  $x$  и  $x \pm 1$ . Верхний индекс  $t$  обозначает номер шага по времени,  $a$  — высоту ступеньки. Переменная  $i$  принимает значение, либо 0 в случае отрицательной величины высоты

ступеньки, либо  $0 \leq i \leq 1$  при положительном значении. Переменная  $i$  принимает значение, равное 1, в случае, если  $H^*$ , определяемое соотношениями (1.65), (1.66) для соответствующей грани ячейки  $(x, y)$  не превышает значения глубины внутри нее. В противном случае значение  $i$ , на соответствующей грани, является отношением глубины, формирующейся при полном торможении потока  $\left( H_x^t U_x^t \right)$  на указанной грани, к высоте ступенчатой границы  $a$ . Когда на границе ячейки присутствует ступенька, значения величин  $H_{x \pm 1/2}^t, U_{x \pm 1/2}^t$  вычисляются квазидвухслойным методом, описанным в предыдущем разделе, в противном случае используется решение стандартной задачи Римана.

### 1.5. Нестационарные волновые картины над уступом дна

В этом разделе даны определения решений типа простых волн и ударных волн, приведена идея построения аналитического решения задачи Римана как для классической мелкой воды, так и для случая ступенчатой границы, и показаны возможные конфигурации течения при наличии ступеньки.

Аналитическое решение задачи принципиально важно для оценки получаемых численных решений. Важно отметить, что существующий подход к аналитическому решению задачи основан на предположении о стационарности перехода потока жидкости над ступенькой, что влечет за собой необходимость дополнительных предположений для обеспечения однозначности получаемого решения (*Карельский, Петросян, 2006*). Кроме того, стационарная зона исключает из рассмотрения класс решений, описывающих потоки, достигающие критического значения непосредственно на ступенчатой границе. В работах (*Остапенко, 2002, 2003*) показаны разрешимость и единственность аналитической задачи, в отсутствие стационарного отошедшего гидравлического прыжка, и приведены некоторые примеры решений.

Полученные при численных расчетах решения необходимо сравнить с аналитическими решениями, но на данный момент задача аналитически полностью не решена. Более того, аналитические решения не могут описать все возможные конфигурации реального течения, так как они не полностью учитывают работу ступеньки (а также возможную диссипацию поступательной энергии). В работе (*Alcrudo, Benkhaldoun, 2001*) показаны некоторые решения задачи. В работе

(Карельский, Петросян, 2006) найдены все возможные режимы стационарного обтекания ступеньки. В целом существующий подход к решению задачи аналитически основан на предположении о стационарности перехода потока жидкости над ступенькой.

В рамках предположения о наличии стационарной зоны задачу можно рассматривать как обобщение задачи Римана для ровной плоскости. Изложим идею построения аналитического решения задачи Римана для классической мелкой воды. Стандартная задача Римана для классических уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.68)$$

— это задача Коши для системы (1.68) с кусочно-постоянными начальными условиями при  $t = 0$  для левого ( $x < 0$ ) и правого ( $x > 0$ ) полупространств:

$$\begin{cases} u = u_1, & h = h_1, & x < 0, \\ u = u_2, & h = h_2, & x > 0, \end{cases} \quad (1.69)$$

где  $g$  — гравитационная постоянная;  $h(x, t)$  — глубина жидкости;  $u(x, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная скорость жидкости.

Для корректного решения системы (1.68), (1.69) необходимо дополнить задачу условиями устойчивости на разрывах (условиями Гюонио):

$$\begin{cases} \oint_{\partial G} h dx - (hu) dt = 0, \\ \oint_{\partial G} (hu) dx - \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + gHh\right) dt = 0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Уравнения (1.70) инвариантны относительно преобразования подобия независимых переменных:  $t' = kt$ ,  $x' = kx$ ,  $k > 0$ . Отсюда из условия единственности решения задачи следует автомодельность решения задачи Римана.

Для системы (1.68) существуют два типа автомодельных решений: непрерывные решения — центрированные волны Римана и разрывные — ударные волны (гидродинамические прыжки) (рис. 1.9):

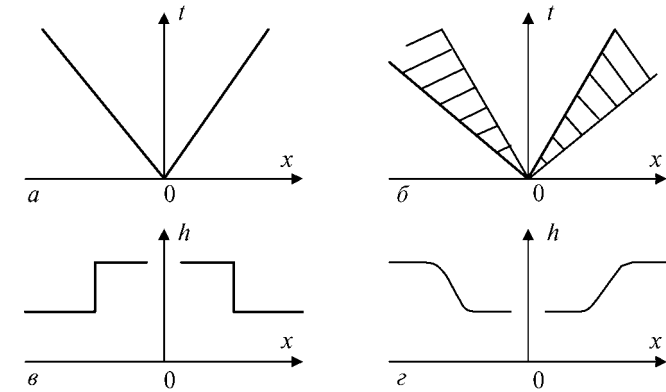


Рис. 1.9. Ударные волны и центрированные волны разрежения

Центрированные волны Римана разделяются на два вида:

$$u \pm 2\sqrt{gh} = u_0 \pm 2\sqrt{gh_0}, \quad (1.71)$$

где  $(u, h)$ ,  $(u_0, h_0)$  — состояния потока в области распространения соответствующей волны разрежения; здесь «+» определяет волну разрежения, обращенную назад, а «−» — волну разрежения, обращенную вперед.

Гидродинамические прыжки также разделяются на два вида:

$$u = u_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}g(h-h_0)^2 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_0}\right)}, \quad (1.72)$$

где  $(u_0, h_0)$  — состояние потока до ударной волны;  $(u, h)$  — состояние потока после ударной волны; здесь «+» соответствует ударной волне, обращенной вперед, а «−» — ударной волне, обращенной назад.

Таким образом, построение решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании элементарных решений типа: постоянные течения, центрированные волны, гидродинамические прыжки (ударные волны) — и в нахождении параметров, характеризующих их области определения. Возможны следующие конфигурации: «две волны разрежения» (а); «два гидродинамических прыжка» (б); «волна разрежения — гидродинамический прыжок» (в); «гидродинамический прыжок — волна разрежения» (г) (рис. 1.10). Отсутствие иных конфигураций обеспечивается теоремой Цемплена и её простейшими следствиями (Рождественский, Яненко, 1978).

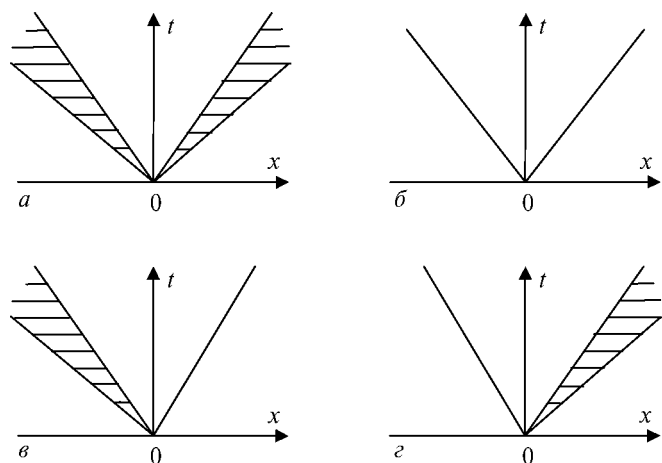


Рис. 1.10. Возможные конфигурации решений классических уравнений мелкой воды

При аналитическом решении задачи автомодельного обтекания уступа потоком мелкой воды, в отличие от стандартной задачи Римана, необходимо добавить предположение о существовании некоторой малой зоны стационарного течения в окрестности ступеньки (рис. 1.11).

Предположение о стационарности потока жидкости в области, достаточно близкой к ступеньке, соответствует одной или пакету

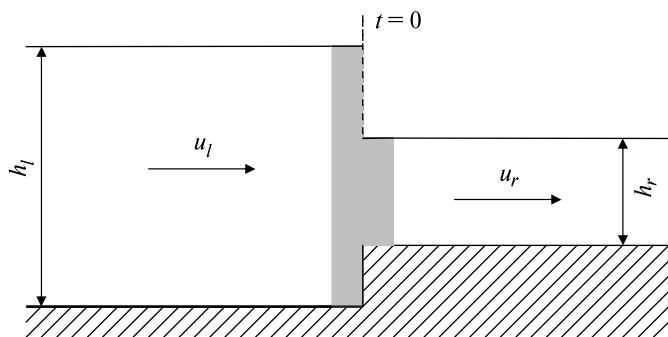


Рис. 1.11. Область стационарности потока (обозначена серым цветом)

стоячих гидродинамических прыжков в этой области (Карельский, Петросян, 2006). Получим уравнения для стационарного перехода. Преобразуем систему уравнений мелкой воды и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{h}{g} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{hu}{h + u^2/2g + z_B} \right] = 0. \quad (1.73)$$

В стационарном случае производная по времени равна нулю, таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{hu}{h + u^2/2g + z_B} \right] = 0. \quad (1.74)$$

Если функция  $z_B(x)$ , задающая подстилающую поверхность, является гладкой, то, проинтегрировав систему (1.74) в области, где поток жидкости стационарен, получим

$$q = hu = \text{const}, \quad (1.75)$$

$$h + \frac{u^2}{2g} + z_B = \text{const}, \quad (1.76)$$

или

$$h + \frac{q^2}{2gh^2} + z_B = \text{const}. \quad (1.77)$$

Тогда для получения гидродинамических параметров в любой области стационарного потока, при условии, что мы знаем эти параметры в некоторой заранее заданной области стационарного потока, нужно решить кубическое уравнение относительно  $h$ .

Предположения о существовании стационарного перехода в некой малой области у ступенчатой границы, а следовательно, зоны, меняющей скорость звука у ступенчатой границы, приводят к нарушению условий теоремы Цемплена, что влечет за собой расширение множества возможных конфигураций. Действительно, наличие стационарной зоны в окрестности уступа скачкообразно меняет глубину жидкости, а вместе с ней — и скорость малых возмущений, что, в свою очередь, увеличивает до трех возможное число частных решений, составляющих устойчивую волновую конфигурацию. На рис. 1.12 штриховая линия указывает направление течения на уступе:

штриховая линия во 2-й координатной четверти — поток стекает с уступа, в 1-й координатной четверти — натекает на уступ.

В случае стекания жидкости с уступа (*a*) в области 1 может находиться как левая волна разрежения, так и левая ударная волна, а также возможен случай отсутствия волн в этой области. В области 2 может находиться как правая волна разрежения, так и правая ударная волна, а также возможен случай отсутствия волн в этой области. В области 3 может находиться как правая волна разрежения, так и правая ударная волна, а также возможен случай отсутствия волн в этой области. Отметим, что в каждой области может находиться не более одной простой волны. Также возможен случай прохождения волны разрежения через уступ, т. е. ее нахождение одновременно в областях 2 и 3.

В случае натекания жидкости на уступ (*b*) в области 1 может находиться как левая волна разрежения, так и левая ударная волна, а также возможен случай отсутствия волн в этой области. В области 2 может находиться как левая волна разрежения, так и левая ударная волна, а также возможен случай отсутствия волн в этой области. В области 3 может находиться как правая волна разрежения, так и правая ударная волна, а также возможен случай отсутствия волн в этой области. Так же как и для предыдущего случая (*a*), в каждой области может находиться не более одной простой волны и возможен случай прохождения волны разрежения через уступ, т. е. ее нахождение одновременно в областях 1 и 2.

Использование указанных, необходимых условий, в предположении, что уступ всегда является затопленным (рис. 1.13*a–z*), позволило получить 56 различных возможных конфигураций. Следует обратить особое внимание на то, что конфигурации, где волна разрежения пересекает уступ, могут быть реализованы только при численном моделировании, в силу ограничений, накладываемых аналитическим подходом на число Фруда непосредственно на уступе.

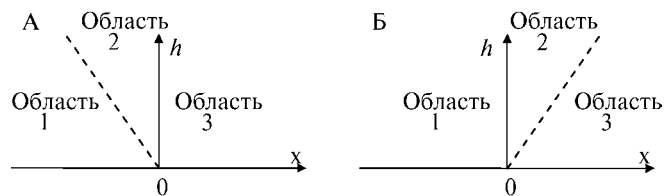


Рис. 1.12. Схема получения конфигураций

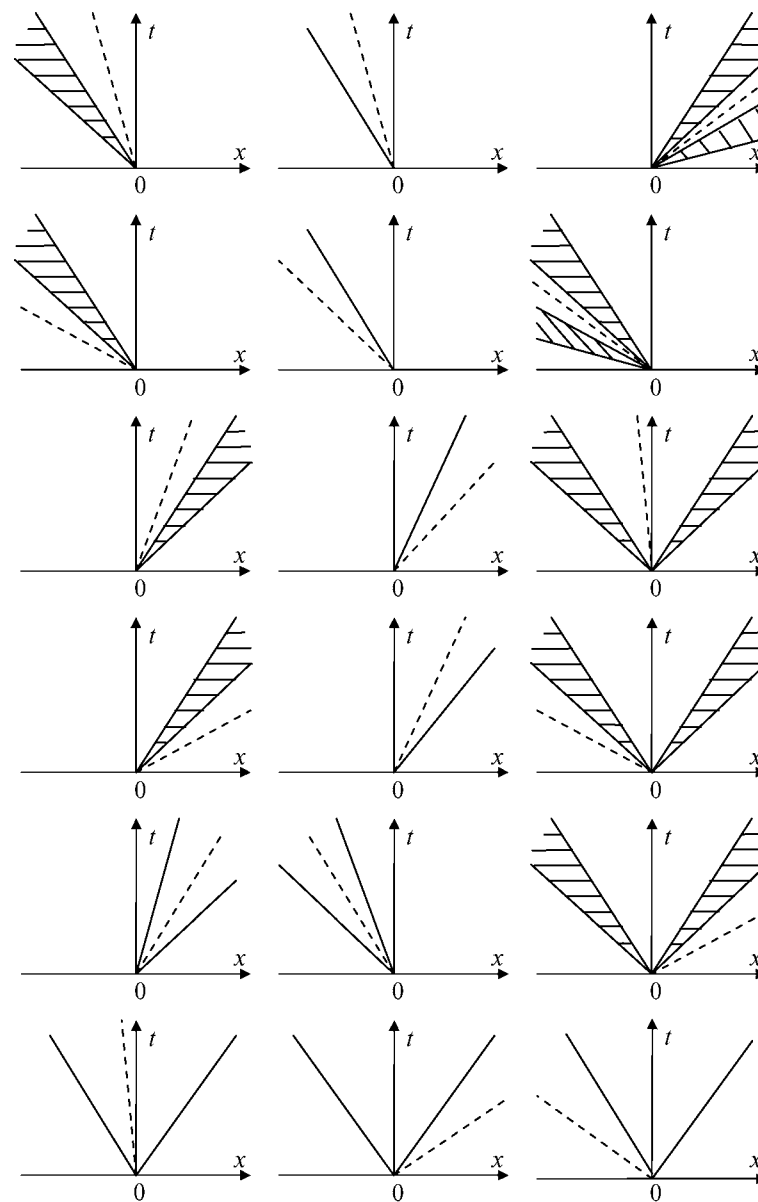


Рис. 1.13*a*. Конфигурации, состоящие из одной простой волны и двух одинаковых простых волн

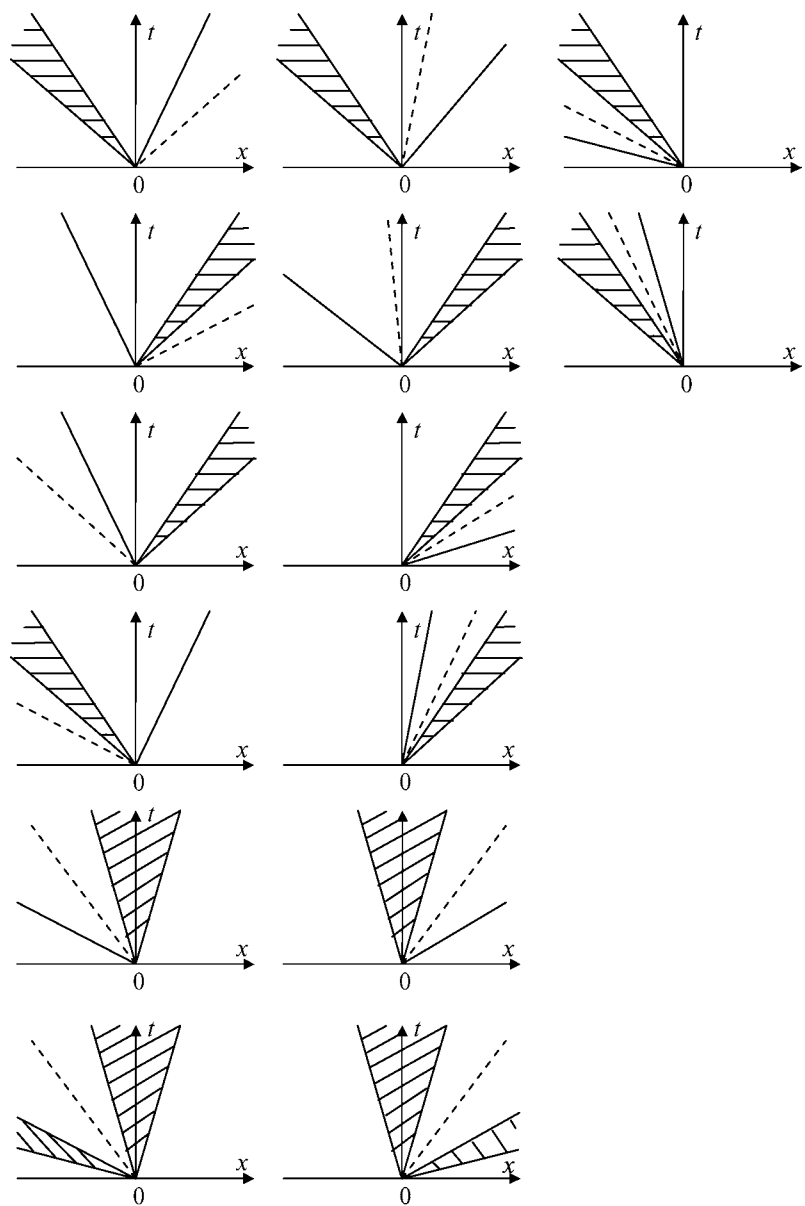


Рис. 1.136. Конфигурации, состоящие из двух разных простых волн и конфигурации, где волна разрежения проходит непосредственно через ступеньку

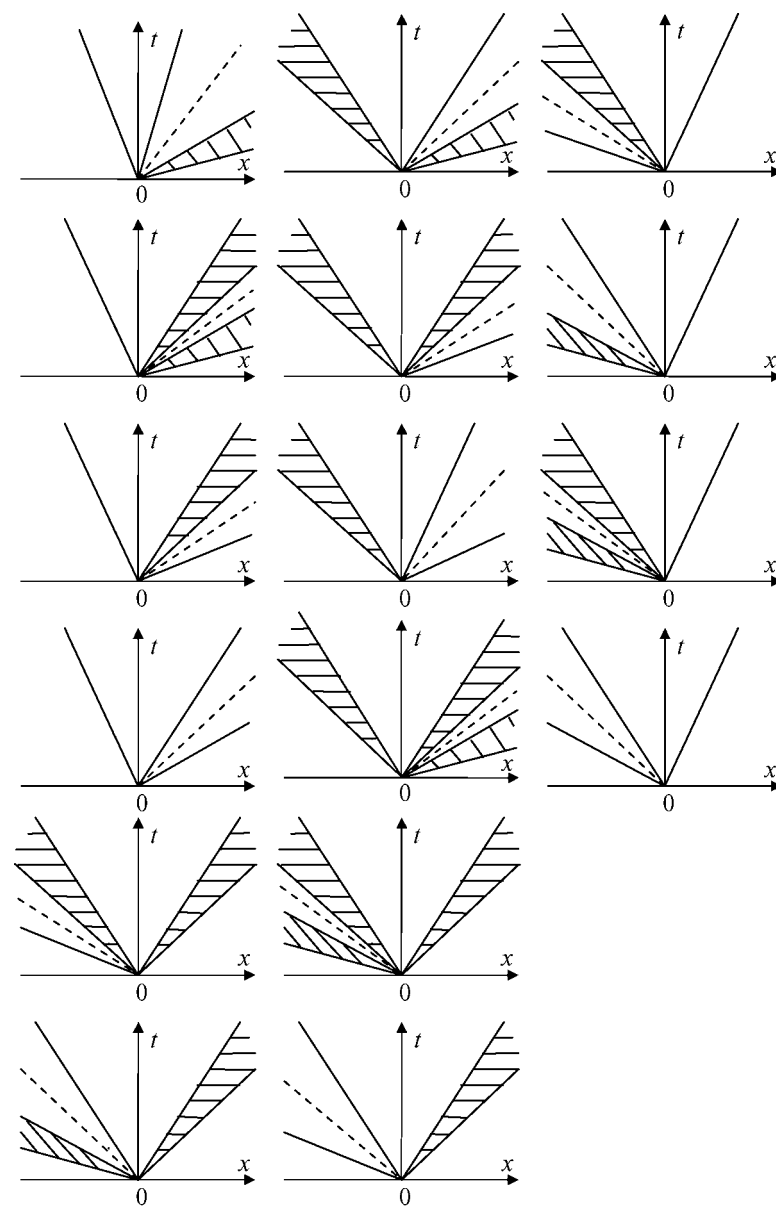


Рис. 1.136. Конфигурации, состоящие из трех простых волн

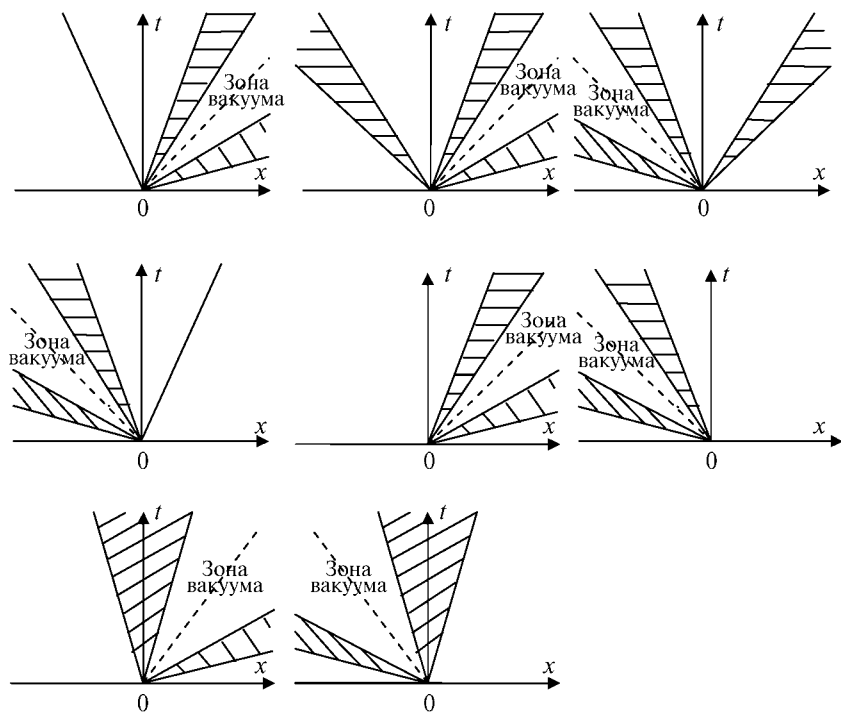


Рис. 1.13г. Конфигурации, включающие зону полного обмеления

На рис. 1.13а–г заштрихованная область описывает центрированную волну Римана; в случае, если область находится справа от штриховой линии, волна обращена вперед, в противоположном случае — назад. Сама штриховая линия показывает направление течения на уступе: штриховая линия во 2-й координатной четверти — поток стекает с уступа, в 1-й координатной четверти — натекает на уступ. Сплошная линия обозначает гидродинамический прыжок, распространяющийся по жидкости в зависимости от расположения по отношению к штриховой линии аналогично волнам Римана. На рис. 1.13а показаны конфигурации, состоящие из одной простой волны и из двух одинаковых простых волн; на рис. 1.13б — конфигурации, состоящие из двух разных простых волн и конфигурации, где волна разрежения проходит непосредственно через ступеньку; на рис. 1.13в — конфигурации, состоящие из трех простых волн; на рис. 1.13г — конфигурации, включающие зону полного обмеления.

Данные конфигурации есть качественно возможные картины течения потока жидкости над ступенькой. Нужно отметить, что нижние четыре конфигурации на рис. 1.13б, а также две нижние на рис. 1.13г, где волна разрежения проходит непосредственно через ступеньку, не могут быть получены аналитически, поскольку аналитический подход предполагает, что решение задачи автомодельно во всей области за исключением некоторой окрестности ступеньки, внутри которой течение считалось стационарным.

Для демонстрации корректности предлагаемого квазидвухслойного метода, используя данные конфигурации (см. рис. 1.13а–г) как тестовые, в разд. 2.6 получим соответствующие им численные решения.

### 1.6. Результаты численного моделирования нестационарного обтекания уступа и сравнение с известными численными и точными решениями

В данном разделе приведены результаты численного моделирования решения задачи Римана на основе квазидвухслойной модели. Представим наиболее показательные конфигурации из 56 случаев, рассмотренных выше, полученных при численном моделировании, в сравнении с соответствующими возможными конфигурациями. Для каждой конфигурации построено три графика (рис. 1.14–1.32): сверху — тестовая аналитическая конфигурация; посередине — зависимость высоты  $h$  потока от координаты  $x$ , полученная численно; снизу — зависимость числа Фруда  $F$  от координаты  $x$ , полученная численно. Штриховой линией на верхнем графике показан контактный разрыв, т. е. разделение жидкости на левую и правую в нулевой момент времени. Штриховая линия на графике высоты  $h$  от координаты  $x$  обозначает начальную глубину потока. В скобках в подписях под рисунками указаны начальные параметры потока.

Численные эксперименты, проведенные в одномерном случае распада произвольного разрыва над ступенькой, продемонстрировали все теоретически возможные картины течения, в том числе и вероятные физически, но не описываемые аналитически (решения, включающие прохождение волны разрежения через ступеньку или ее примыкание слева). В этом разделе представлены результаты сравнения полученных решений с известными численными и точными решениями задачи Римана над ступенчатой границей.



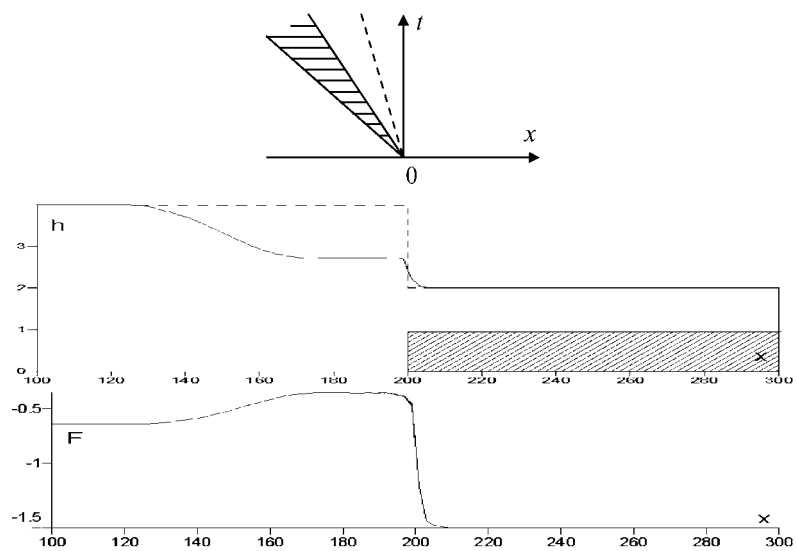


Рис. 1.14. Конфигурация «левая волна разрежения слева от ступеньки»  
( $h_l = 4; u_l = -4; h_r = 1; u_r = -5$ )

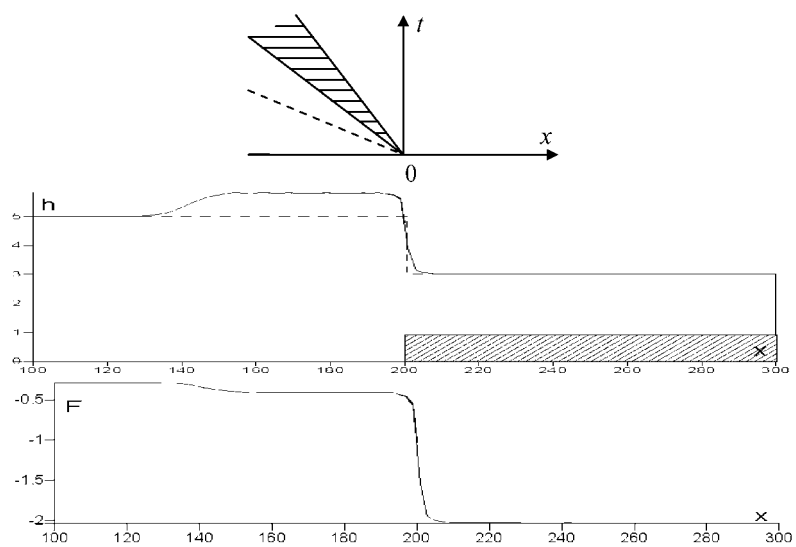


Рис. 1.15. Конфигурация «правая волна разрежения слева от ступеньки»  
( $h_l = 5; u_l = -2; h_r = 2; u_r = -9$ )

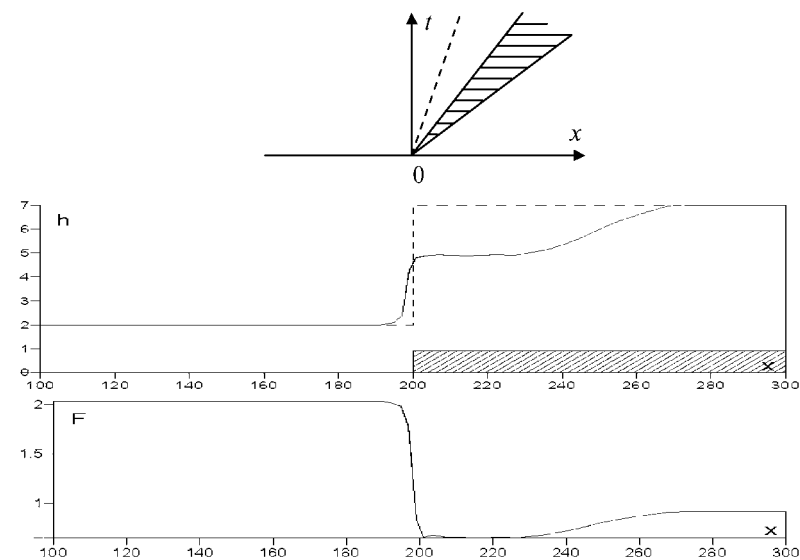


Рис. 1.16. Конфигурация «правая волна разрежения справа от ступеньки»  
( $h_l = 2; u_l = 9; h_r = 6; u_r = 7$ )

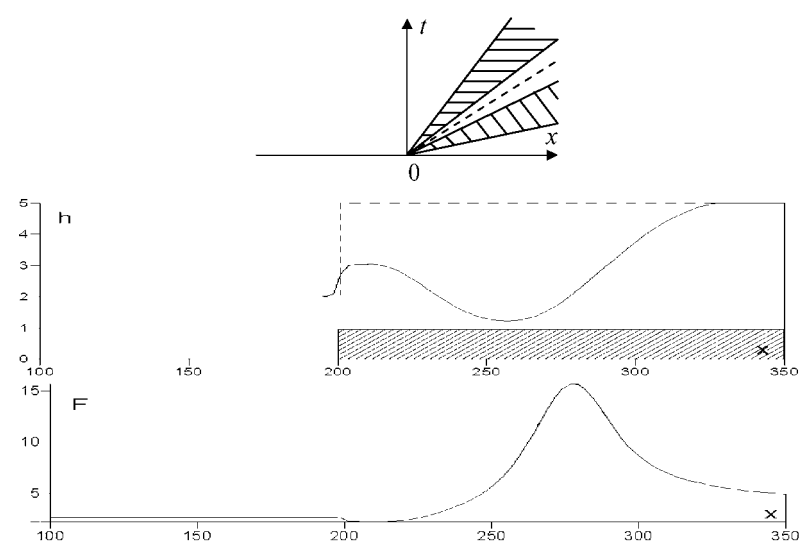


Рис. 1.17. Конфигурация «две волны разрежения справа от ступеньки»  
( $h_l = 2; u_l = 12; h_r = 4; u_r = 30$ )

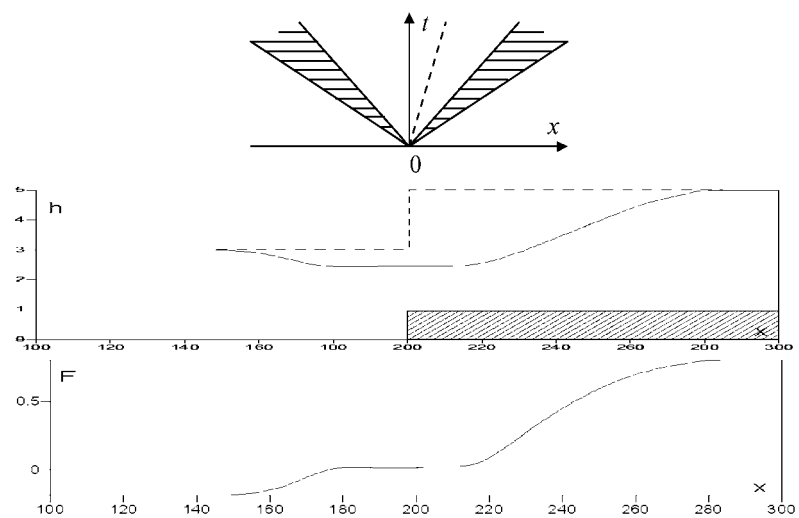


Рис. 1.18. Конфигурация «левая волна разрежения слева от ступеньки, правая волна разрежения справа» ( $h_l = 3; u_l = -1; h_r = 4; u_r = 5$ )

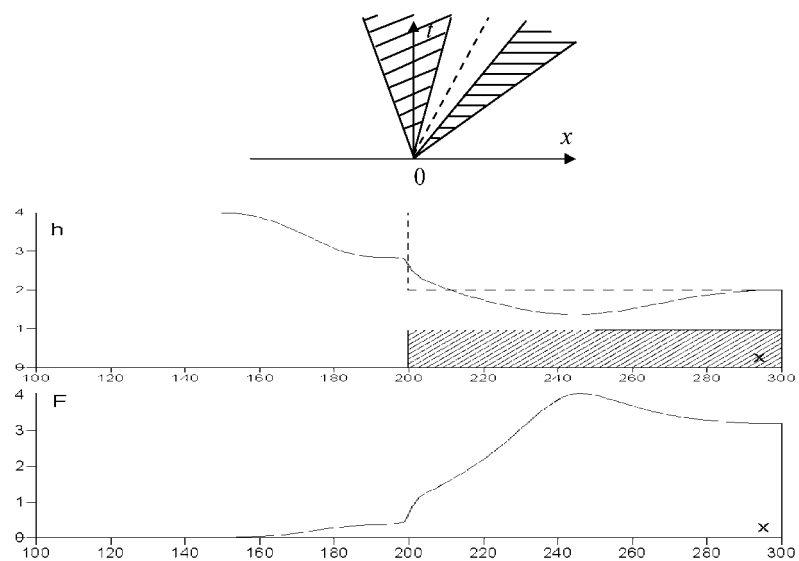


Рис. 1.19. Конфигурация «левая волна разрежения через ступеньку, правая волна разрежения справа от ступеньки» ( $h_l = 4; u_l = 0; h_r = 1; u_r = 10$ )

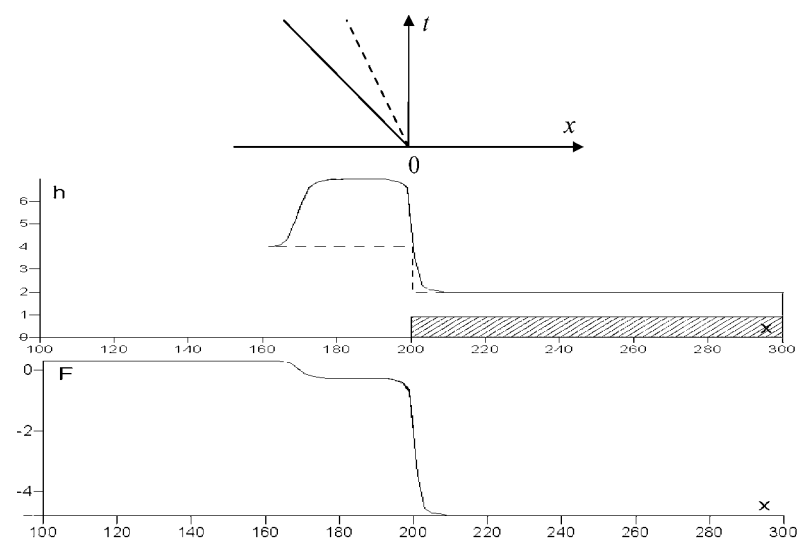


Рис. 1.20. Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки» ( $h_l = 4; u_l = 2; h_r = 1; u_r = -15$ )

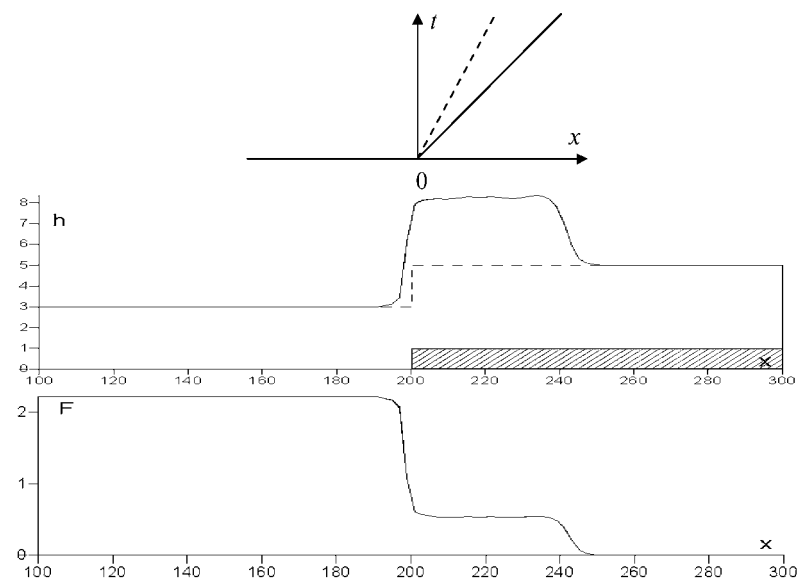


Рис. 1.21. Конфигурация «правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 3; u_l = 12; h_r = 4; u_r = 0$ )

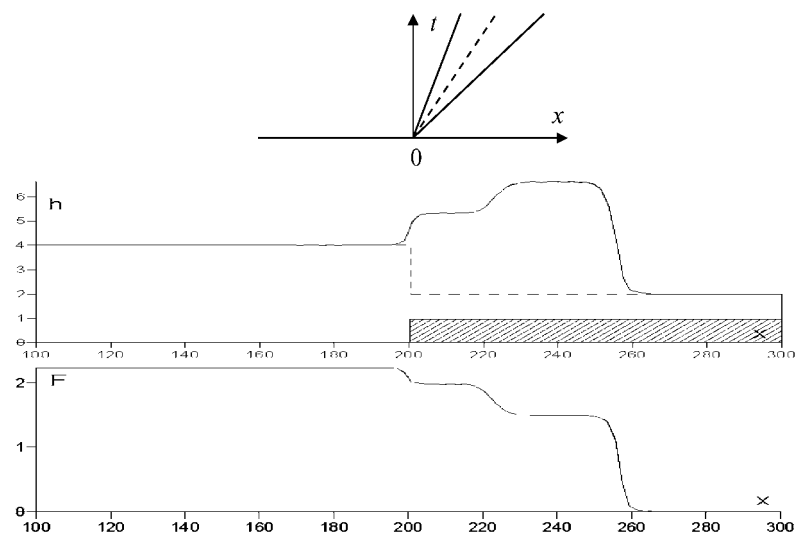


Рис. 1.22. Конфигурация «две ударные волны справа от ступеньки» ( $h_l = 4; u_l = 14; h_r = 1; u_r = 0$ )

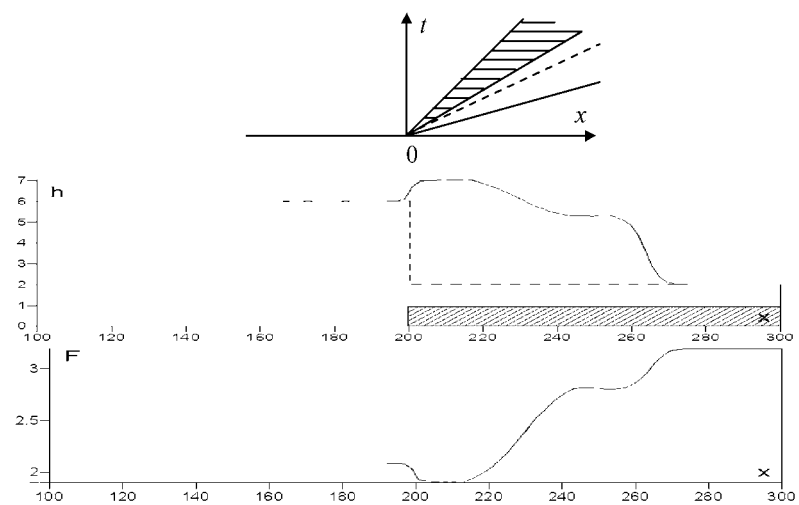


Рис. 1.23. Конфигурация «левая волна разрежения справа от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 6; u_l = 16; h_r = 1; u_r = 10$ )

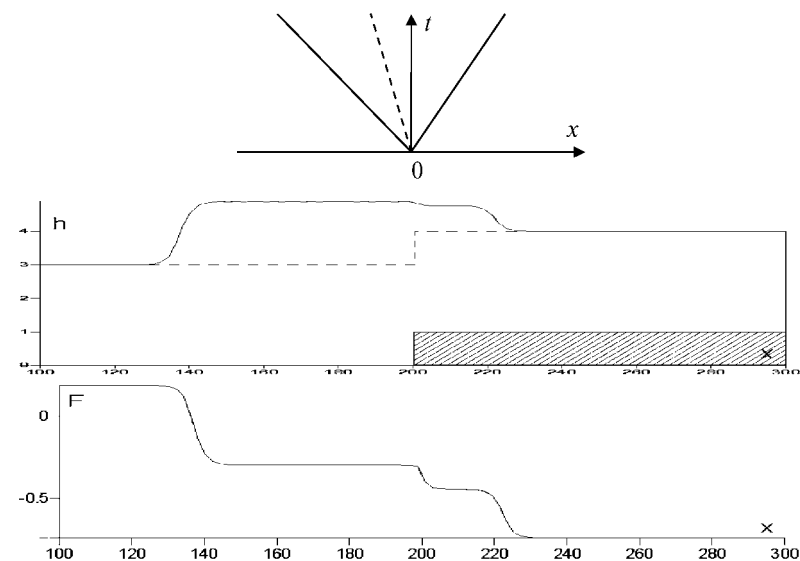


Рис. 1.24. Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 3; u_l = 1; h_r = 3; u_r = -4$ )

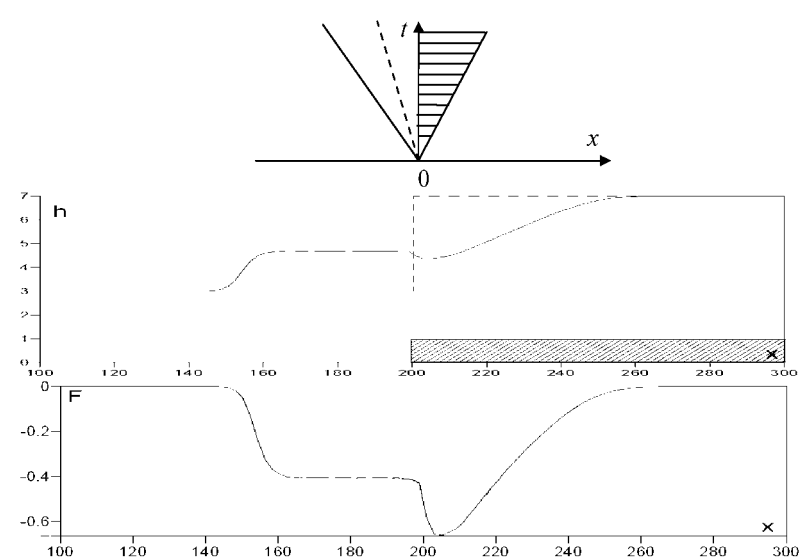


Рис. 1.25. Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки, правая волна разрежения справа от ступеньки» ( $h_l = 3; u_l = 0; h_r = 6; u_r = 0$ )

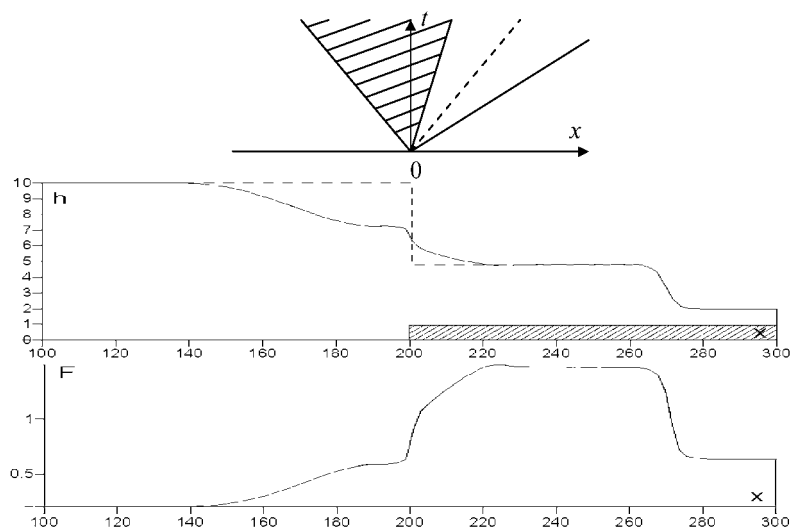


Рис. 1.26. Конфигурация «левая волна разрежения через ступеньку, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 10; u_l = 2; h_r = 1; u_r = 2$ )

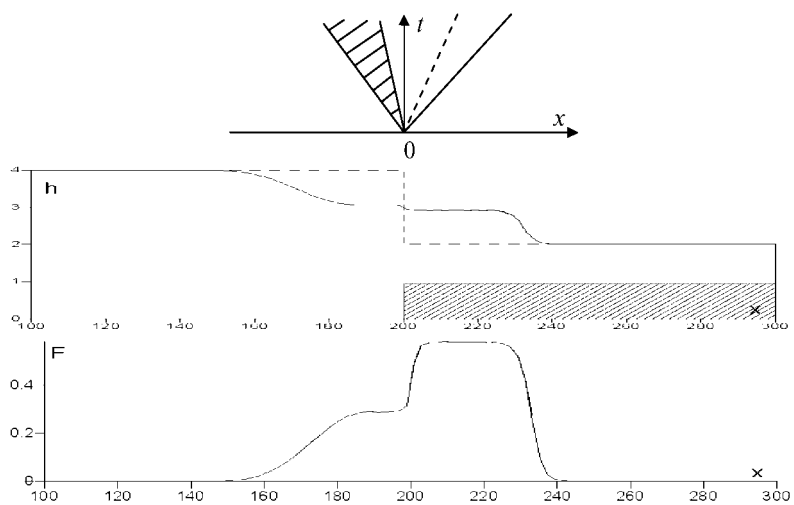


Рис. 1.27. Конфигурация «левая волна разрежения слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 4; u_l = 0; h_r = 1; u_r = 0$ )

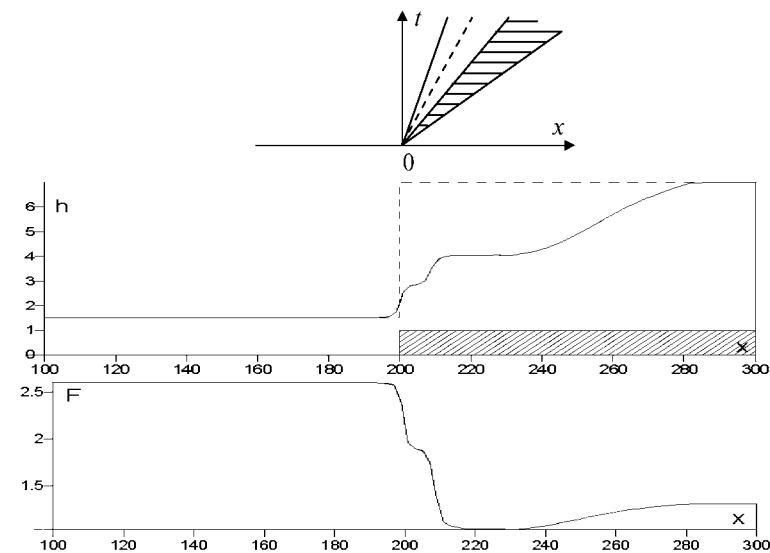


Рис. 1.28. Конфигурация «левая ударная волна справа от ступеньки, правая волна разрежения справа от ступеньки» ( $h_l = 1,5; u_l = 10; h_r = 6; u_r = 10$ )

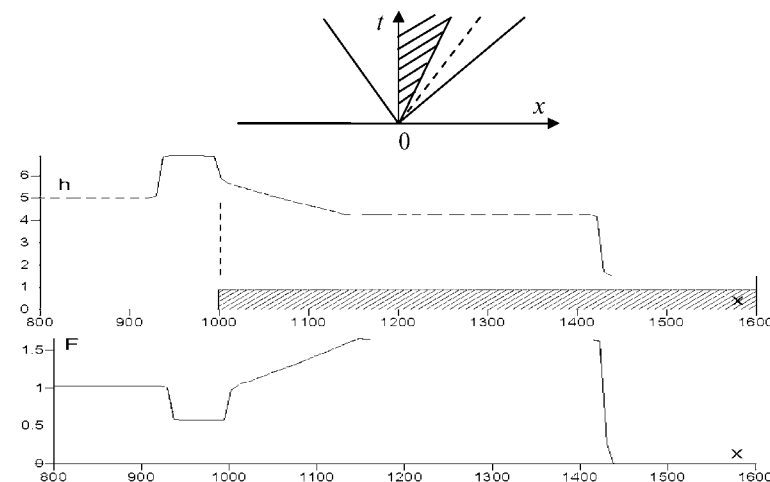
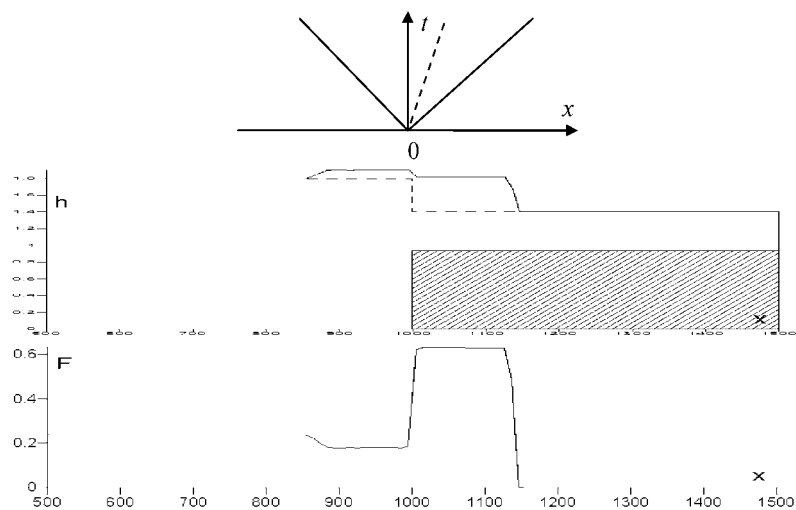
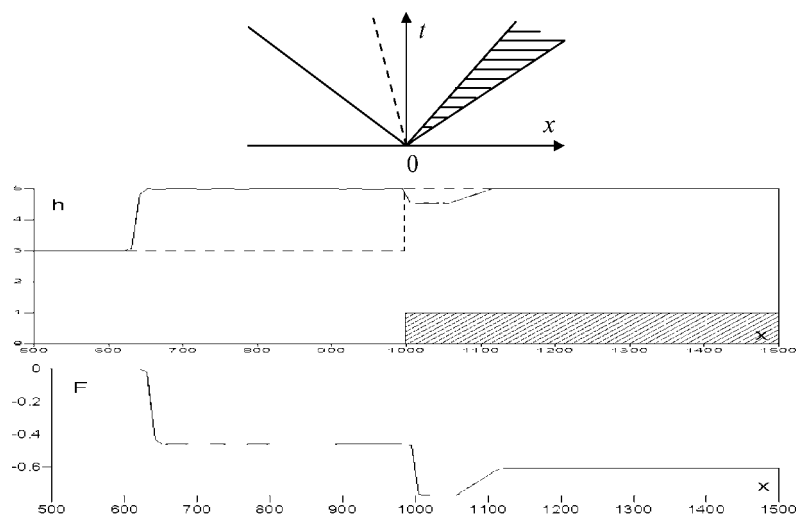


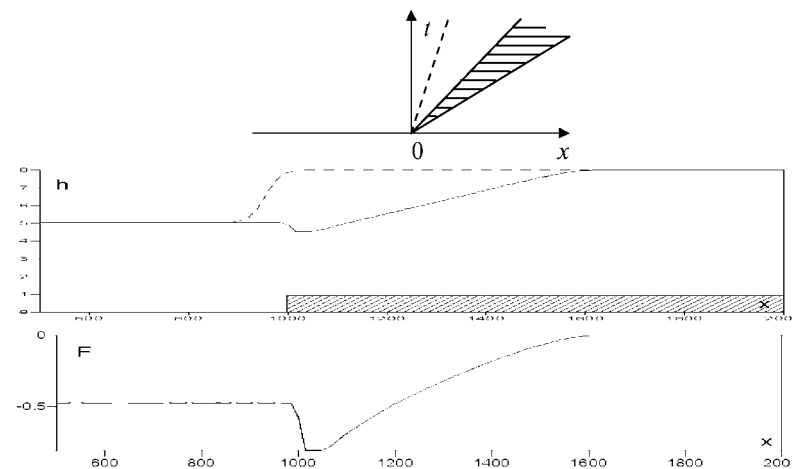
Рис. 1.29. Результат натекания ударной волны на ступеньку. Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки, левая волна разрежения справа от ступеньки, и правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 5; u_l = 7,2; h_r = 0,5; u_r = 0$ )



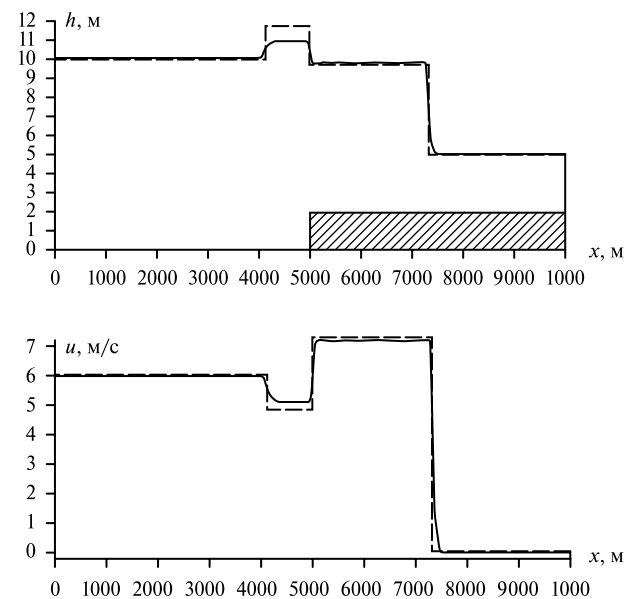
**Рис. 1.30.** Результат натекания ударной волны на ступеньку. Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 1,8; u_l = 1; h_r = 0,4; u_r = 0$ )



**Рис. 1.31.** Результат схода ударной волны со ступеньки. Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки, правая волна разрежения справа от ступеньки» ( $h_l = 3; u_l = 0; h_r = 4; u_r = -3,8$ )



**Рис. 1.32.** Результат натекания волны разрежения на ступеньку. Конфигурация «правая волна разрежения справа от ступеньки» (плотную слева от ступеньки создана правая волна разрежения, натекающая на ступеньку)



**Рис. 1.33.** Сравнение расчетов распада произвольного разрыва над ступенчатой границей

На рис. 1.29, 1.30 представлены волновые картины течения, получаемые при набегании ударной волны или волны разрежения на ступеньку и при сходе ударной волны со ступеньки. Эти случаи являются важной задачей взаимодействия уединенных волн (солитонов) со ступенькой.

На рис. 1.33 показан результат решения задачи распада разрыва и проведено его сравнение с методом, использующим замену ступеньки наклонной плоскостью (Karelsky et al., 2000b). В качестве начальных условий разрыва использовались следующие параметры: слева от ступеньки высота жидкости 10 м, скорость 6 м/с, справа — высота 3 м, скорость 0 м/с, высота ступеньки 2 м. Штриховой линией обозначен результат полученный в работе Karelsky et al., (2000b), сплошной линией — результат, полученный квазидвухслойным методом.

Как видно на рис. 1.33 качественно волновая картина в обоих методах совпадает (левый гидравлический прыжок слева от ступеньки, правый гидравлический прыжок справа от ступеньки). Однако имеются ощутимые отличия в интенсивности левого гидравлического прыжка и особенно в форме его фронта, обусловленные сложностью течения вблизи уступа. Действительно, в решении уравнений Эйлера вблизи уступа присутствует вихревая зона возвратного течения, которая и приводит к искажению фронта гидравлического прыжка и уменьшению его интенсивности за счет появления вертикальных ускорений. Учет данного эффекта особенно важен в случае больших расчетных областей со сложной комплексной подстилающей поверхностью, поскольку взаимодействие возмущений от различных неоднородностей могут принципиально изменить структуру описываемого течения.

Также было проведено сравнение полученных решений с набором точных решений задачи Римана для уравнений мелкой воды со ступенчатой границей, представленных в работе (Bernetti et al., 2007). Набор решений был получен следующим образом: система уравнений была расширена уравнением для подстилающей границы с использованием законов сохранения массы и импульса над ступенчатой границей. Для исключения множественности решений была задана необходимость выполнения следующих условий: диссипация полной энергии через стационарную ударную волну над ступенчатой границей и исключение возможности перехода потока из субкритического в суперкритическое состояние при прохождении ступенчатой границы. Далее представлены несколько графиков сравнения решения, по-

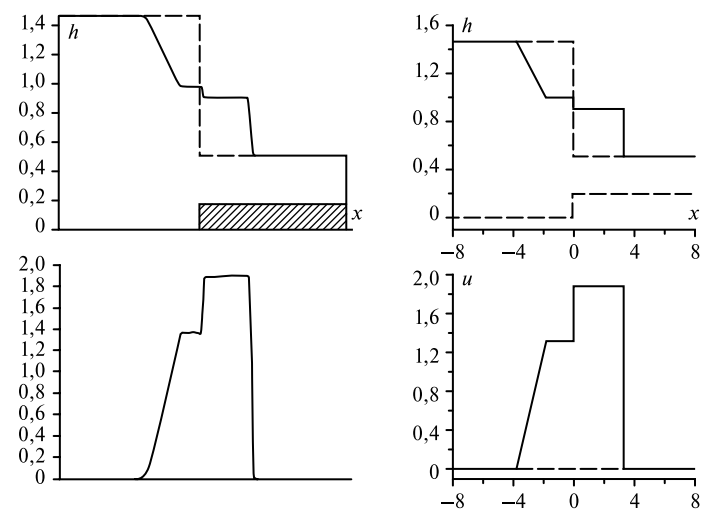
лученного с помощью квазидвухслойной модели, с точным решением, полученным в работе (Bernetti et al., 2007).

На рис. 1.34 представлено решение задачи Римана, со следующими начальными условиями: слева от ступеньки высота жидкости 1,462 м; число Фруда равно нулю; справа — высота 0,309 м; число Фруда равно нулю; высота ступеньки 0,2 м.

На рис. 1.35 представлено решение задачи Римана со следующими начальными условиями: слева от ступеньки высота жидкости 0,569 м; число Фруда равно 0,9; справа — высота 0,569 м; число Фруда равно нулю; высота ступеньки 0,2 м.

На рис. 1.36 представлено решение задачи Римана, со следующими начальными условиями: слева от ступеньки высота жидкости 0,504 м; число Фруда равно 1,5; справа — высота 0,190 м, число Фруда равно 0, высота ступеньки 0,2 м.

Выявлено хорошее совпадение решений, полученных с помощью квазидвухслойной модели, и точных решений, найденных в работе (Bernetti et al., 2007).



**Рис. 1.34.** Сравнение полученного решения (слева) с точным решением (справа). Решение типа левая волна разрежения слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки

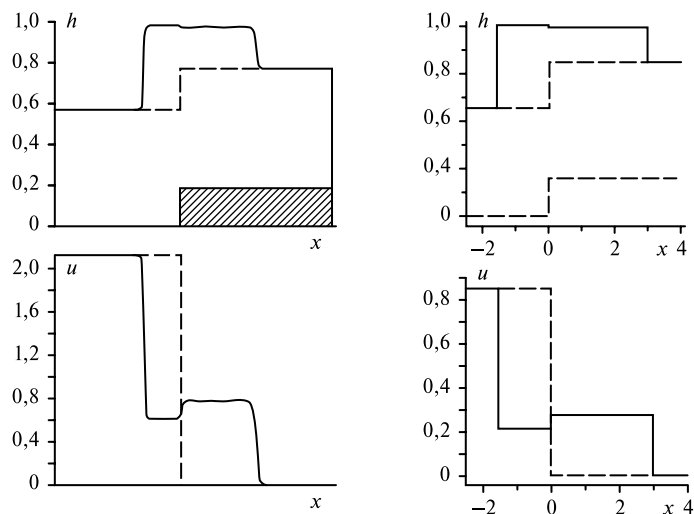


Рис. 1.35. Сравнение полученного решения (слева) с точным решением (справа). Решение типа левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки

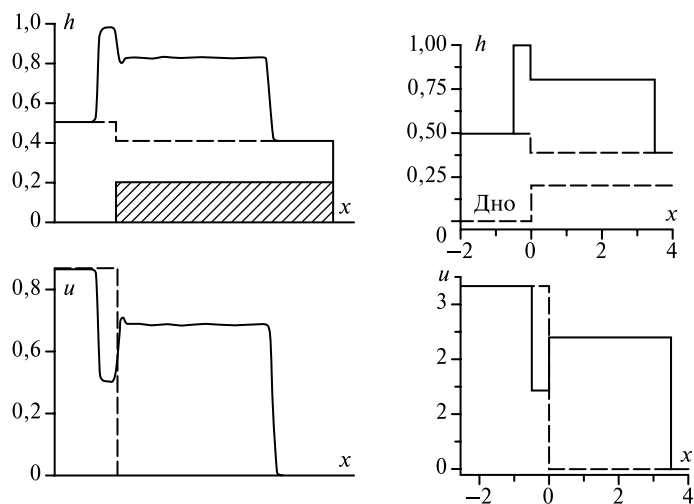


Рис. 1.36. Сравнение полученного решения (слева) с точным решением (справа). Решение типа «левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки, суперкритический поток»

### 1.7. Обсуждение аналитического подхода и квазидвухслойной модели. Анализ численных решений

В этом разделе обсуждены особенности аналитического подхода к решению задачи Римана и особенности предложенной квазидвухслойной модели.

Пренебрежение при построении аналитического решения диссипацией поступательной механической энергии на турбулизацию потока вблизи препятствия приводит к потере целого класса решений, для которых волна разрежения проходит через ступеньку либо примыкает к ней слева. Физически же такие решения возможны (Alcrudo, Benkhaldoun, 2001) и реализованы квазидвухслойной моделью (решения на рис. 1.19, 1.25).

Следует отметить, что указанный недостаток распространяется как на простые волны, обращенные назад, так и на волны Римана, обращенные вперед. Действительно, выпишем уравнения (1.75) и (1.76), которые являются следствием интегральных законов сохранения массы и полной энергии соответственно, в предположении стационарности течения в некоторой области, примыкающей к ступеньке:

$$h_2 u_2 = h_3 u_3, \quad (1.78)$$

$$h_2 + \frac{u_2^2}{2g} = h_3 + \frac{u_3^2}{2g} + a. \quad (1.79)$$

Рассматриваем случай, когда  $h_2 > a$ . Для удобства перепишем соотношения на стационарном переходе в переменных  $c_2$ ,  $F_2$ ,  $c_3$ ,  $F_3$ . Здесь индекс «3» соответствует значению гидродинамических величин справа от ступеньки, а индекс «2» — соответственно слева;

$c = \sqrt{gh}$  — скорость распространения слабых возмущений,  $F$  — число Фруда,  $F = \frac{u}{c}$ :

$$c_2^3 F_2 = c_3^3 F_3, \quad (1.80)$$

$$\frac{1}{g} c_2^2 + \frac{1}{2g} F_2^2 c_2^2 = \frac{1}{g} c_3^2 + \frac{1}{2g} F_3^2 c_3^2 + a. \quad (1.81)$$

Введём обозначение  $b^2 = ga$ , тогда (1.81) примет вид

$$c_2^2 + \frac{1}{2} F_2^2 c_2^2 = c_3^2 + \frac{1}{2} F_3^2 c_3^2 + b^2 \Leftrightarrow c_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} F_2^2\right) = c_3^2 \left(1 + \frac{1}{2} F_3^2\right) + b^2. \quad (1.82)$$

В случае, когда поток перед ступенькой достигает критического значения  $|F_2| = 1$ , имеем

$$c_2 = c_3 F_3^{1/3}, \quad (1.83)$$

$$\frac{3}{2} c_3^2 F_3^{2/3} = c_3^2 \left( 1 + \frac{1}{2} F_3^2 \right) + b^2, \quad (1.84)$$

$$0 = c_3^2 \left( 1 + \frac{1}{2} F_3^2 - \frac{3}{2} F_3^{2/3} \right) + b^2. \quad (1.85)$$

Очевидно, что уравнение (1.85) имеет решение только в случае  $1 + \frac{1}{2} F_3^2 - \frac{3}{2} F_3^{2/3} < 0$ , однако указанное неравенство не выполнимо.

Таким образом, поток не может достигать критического значения перед ступенькой в рамках указанной модели (следует подчеркнуть, что данный результат есть следствие пренебрежения диссипацией поступательной энергии за счет турбулизации потока в области ступеньки).

С другой стороны, если бы учет диссипации поступательной энергии за счет турбулизации присутствовал, то уравнение (1.82) выглядело бы так:

$$c_2^2 \left( 1 + \frac{1}{2} F_2^2 \right) + K = c_3^2 \left( 1 + \frac{1}{2} F_3^2 \right) + b^2, \quad (1.86)$$

где  $K$  — некий коэффициент. Причем, если  $K = b^2$ , то тогда данный случай эквивалентен отсутствию ступеньки. Если  $K < b^2$ , то ступенька просто уменьшится. Если  $K > b^2$ , то получается, что ступенька теперь повернута в другую сторону и в данном случае  $|F_3| \neq 1$ . От времени  $K$  зависеть не может, так как рассматривается стационарная область. Таким образом,  $K$  есть функция других гидродинамических параметров и высоты ступеньки:  $K = f(h, u, a)$ , что естественным образом учтено при численном моделировании. В работе (Карельский, Петросян, 2006) показано, что для любого другого  $F_2$  будет существовать соответствующее  $F_3$ . Кроме того, есть ограничение на высоты, получаемые из уравнений (1.78) и (1.79) (Остапенко, 2003):  $h_1 u_2 = h_3 u_3$ ,  $h_2 + u_2^2/2g = h_3 + u_3^2/2g + a$ , откуда

$$h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2} = h_3 + \frac{q^2}{2gh_3^2} + a, \quad (1.87)$$

$$q^2 \left( \frac{1}{2gh_2^2} - \frac{1}{2gh_3^2} \right) = (h_3 + a - h_2), \quad (1.88)$$

$$q^2 = \frac{(h_3 + a - h_2) h_2^2 h_3^2}{(h_3^2 - h_2^2)}. \quad (1.89)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} h_3 > h_2, \\ h_2 > h_3 + a. \end{cases} \quad (1.90)$$

Однако при численном моделировании данное ограничение присутствует только для определенных режимов течения, что лучше согласуется с наблюдаемыми в природе течениями.

Учет диссипации поступательной энергии в виде функциональной зависимости  $K = f(h, u, a)$  преобразует систему (1.90):

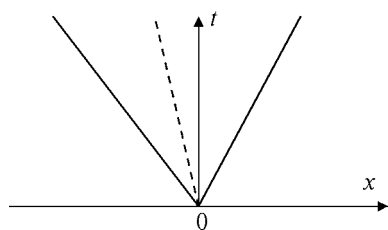
$$\begin{cases} h_3 > h_2, \\ h_2 > h_3 + a - f(h, u, a) \end{cases} \quad (1.91)$$

и приводит к исчезновению ограничений на высоты.

В данном разделе проведен анализ полученных в разд. 1.6 решений. Приведены примеры, иллюстрирующие автомодельность решений, стационарность скачка над ступенчатой границей и увеличение скорости формирования волновой картины вблизи ступеньки при измельчении шага по пространству. Проведенный анализ полученных данных показал их автомодельность (что хорошо согласуется с экспериментальными данными (Букреев, Гусев, 2003), моделирующими конфигурацию «две ударные волны справа от ступеньки» (см. рис. 1.22)), стационарность скачка над ступенчатой границей (что хорошо согласуется с разрабатываемым аналитическим решением задачи (Карельский, Петросян, 2006), и увеличение скорости формирования волновой картины вблизи ступеньки при измельчении шага по пространству. Отметим, что в области над ступенькой образуются стационарные волны, которые приводят как к уменьшению, так и к увеличению глубины потока.

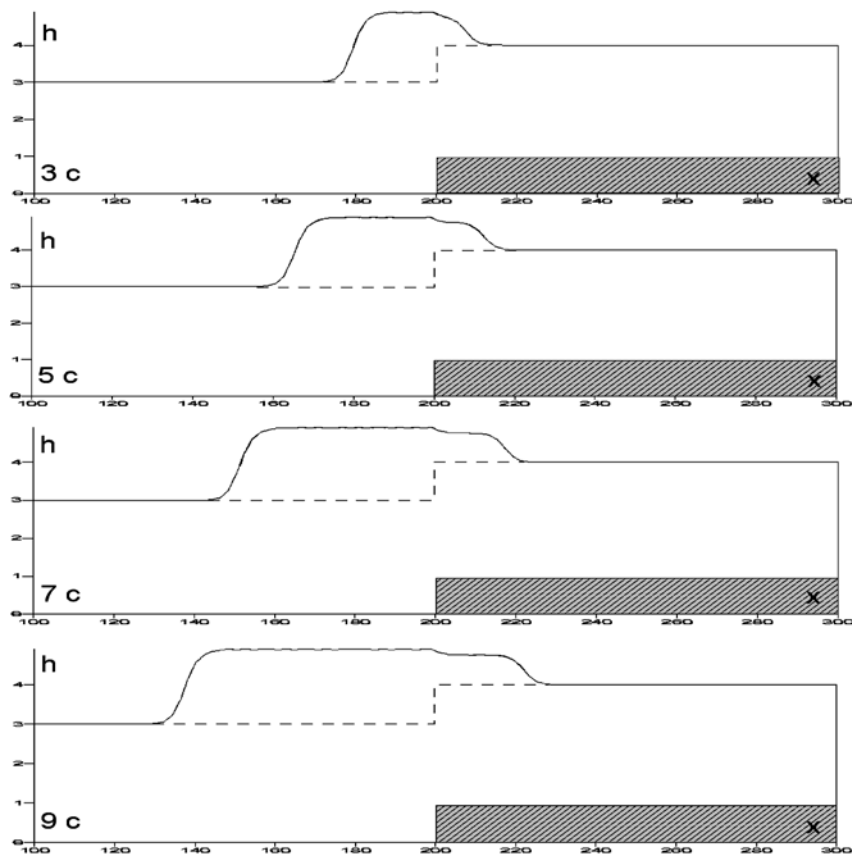
Каждое полученное решение было проверено на автомодельность следующим образом. Изучалась эволюция распространения возмущений, выделялись зоны стационарности потока, ударные волны и волны разрежения, и в итоге решение сопоставлялось с автомодельным аналогом среди тестовых аналитических конфигураций. Приведем





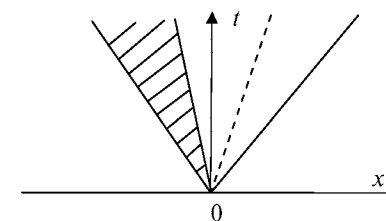
**Рис. 1.37.** Конфигурация «левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 3; u_l = 1; h_r = 3; u_r = -4$ )

пример анализа для конфигурации (рис. 1.37) «левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки».



**Рис. 1.38.** Эволюция распространения возмущений в конфигурации «левая ударная волна слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 3; u_l = 1; h_r = 3; u_r = -4$ )

**Рис. 1.39.** Конфигурация «левая волна разрежения слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 4; u_l = 0; h_r = 1; u_r = 0$ )



Эволюция распространения возмущений представлена на рис. 1.38.

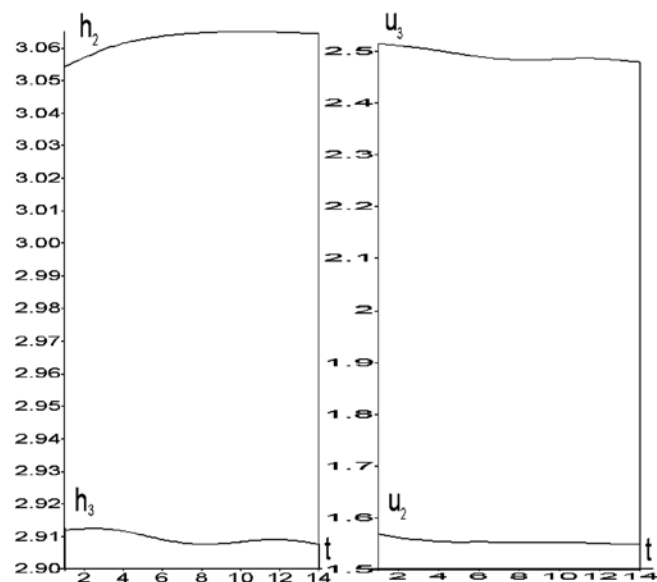
Из данных рис. 1.38 видно, что со временем влево от ступеньки уходит левая ударная волна, над ступенькой остается стационарная волна, а вправо от ступеньки уходит правая ударная волна. Со временем конфигурация сохраняется.

Анализ стационарности скачка над ступенчатой границей проводился следующим образом. Непосредственно вблизи ступенчатой границы изучалась зависимость высот и скоростей потока жидкости от времени. Приведем пример анализа для конфигурации (рис. 1.39) «левая волна разрежения слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки».

Зависимости высот и скоростей потока жидкости от времени  $t$  непосредственно вблизи ступенчатой границы представлены на рис. 1.40.

Как видно из представленных графиков, стационарность решения над ступенчатой границей со временем сохраняется. Для величин потока непосредственно справа от ступеньки была выявлена периодическая зависимость, в изучаемом диапазоне не связанная с временным шагом численного метода. Амплитуда обнаруженных колебаний оказалась существенно меньше погрешности используемого численного алгоритма. Присутствие колебаний гидродинамических параметров вблизи уступа — это, по-видимому, следствие существенной трехмерности изучаемого явления.

Для анализа скорости формирования картины вблизи уступа дна, была проведена процедура измельчения шага по пространству вблизи ступенчатой границы. Непосредственно вблизи ступенчатой границы изучалась зависимость высот и скоростей потока жидкости от времени при различных шагах по пространству. Далее приведен пример анализа для конфигурации «левая волна разрежения слева от ступеньки, правая ударная волна справа от ступеньки» ( $h_l = 4; u_l = 0; h_r = 1; u_r = 0$ ) (см. рис. 1.39.). На рис. 1.41 представлены зависимости высот и скоростей потока жидкости от времени  $t$  непосредственно вблизи ступенчатой границы.

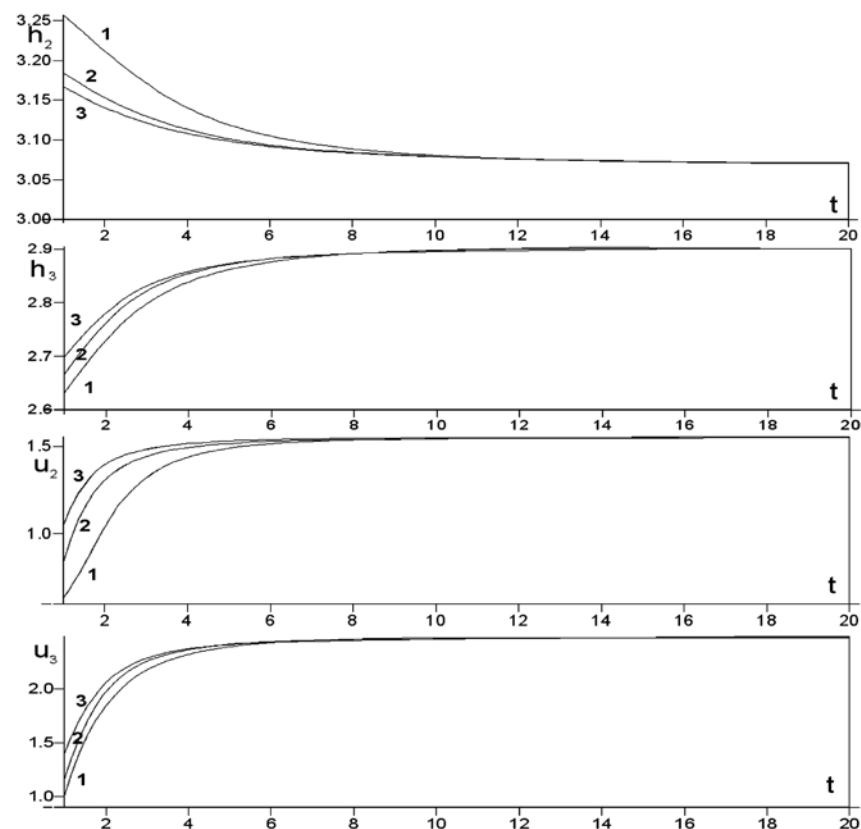


**Рис. 1.40.** Слева зависимость высот потока жидкости (относительно оси  $x$ ) от времени  $t$  непосредственно вблизи ступенчатой границы ( $h_2$  — слева и  $h_3$  — справа). Справа зависимость скоростей от времени  $t$  непосредственно вблизи ступенчатой границы ( $u_2$  — слева и  $u_3$  — справа)

Как видно из представленных графиков (см. рис. 1.41.), при измельчении шага по пространству скорость формирования волновой картины вблизи ступеньки увеличивается.

### 1.8. Выводы

В главе сформулирована и решена задача о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды на ступенчатой границе. Решена задача о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды. Показано, что ограничения, накладываемые условием односвязности области, занимаемой жидкостью около ступеньки, определяет характер возможных течений. Установлена связь найденных ограничений с направлением потока жидкости и определены характеристики задачи, обусловленные отношением глубины потока к высоте ступеньки. Получены аналитические выра-



**Рис. 1.41.** Анализ скорости формирования волновой картины вблизи ступеньки при измельчении шага по пространству для длин ячейки: 1 — 1 м; 2 — 0,5 м; 3 — 0,25 м

жения для ограничений значений гидродинамических параметров течения в каждом режиме. Результаты, полученные в настоящей работе, являются неотъемлемой частью решения нестационарной задачи.

Предложена квазидвухслойная модель для расчета течений мелкой воды вблизи уступа дна, основанная на квазидвухслойной теории мелкой воды. Показано, что при правильном разделении жидкости на два слоя физика процессов в окрестности ступеньки может быть приближенно описана решением классических уравнений мелкой воды со специально подобранными начальными условиями, описывающими

взаимодействие слоев. Поскольку в каждый момент времени вводится собственное двухслойное деление, модель была названа квазидвухслойной моделью мелкой воды.

Предложенная квазидвухслойная модель позволяет воспроизводить сложную физику течения вблизи ступеньки. Были выявлены: автомодельность полученных решений, наличие стационарного скачка вблизи ступенчатой границы, увеличение скорости формирования волновой картины вблизи ступеньки при измельчении шага по пространству. Были получены все конфигурации, возможные в предположении наличия стационарного перехода вблизи ступенчатой границы, и показано, что в результате качественного учета диссипации поступательной механической энергии как функции крупномасштабных характеристик потока класс полученных решений расширяется решениями типа прохождения через ступеньку. Проведено сравнение с известными численными и точными решениями задачи Римана на ступенчатой границе. Предложенная квазидвухслойная модель может быть использована для разработки численных методов расчета течений мелкой воды над подстилающей поверхностью любой сложности.

## ГЛАВА 2. Использование квазидвухслойного подхода для численного моделирования течений мелкой воды над сложной подстилающей поверхностью в присутствии внешних сил

### 2.1. Введение

В данной главе обсуждается постановка задачи о нахождении течения тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над произвольной границей в рамках приближения мелкой воды и предлагается новый численный метод ее решения. Произвольная комплексная подстилающая поверхность описывается односвязной поверхностью второго порядка  $F(x, y, z) = 0$ . Для моделирования течений над такой поверхностью существует два принципиально различных случая: когда поверхность задается дифференцируемой функцией пространственных переменных в каждой точке пространства  $z = b(x, y)$  и когда существует некоторое ограниченное число точек, в которых задание подстилающей поверхности дифференцируемой функцией в явном виде не возможно. Наиболее общий пример подстилающей поверхности, включающий все характерные типы неоднородностей, приведен на рис. 2.9.

Наличие препятствий, обусловленных сложной топологией границы, требует либо решения полных уравнений гидродинамики, либо альтернативных приближений, поскольку классические приближения мелкой воды вблизи препятствий, обусловленных резким изменением подстилающей поверхности, нарушаются. В данной главе в разд. 2.2, 2.3 предлагается метод, с одной стороны, использующий усреднение по вертикальной координате уравнений Эйлера в приближении

мелкой воды, с другой стороны, учитывающий влияние вертикальных неоднородностей течения, характерных для гидродинамических течений над сложной границей.

Профиль произвольной неоднородной подстилающей поверхности аппроксимируется ломаной, состоящей из соответствующей комбинации вертикальных и горизонтальных отрезков, вершины которых соответствуют узлам сетки, получаемой после перехода к конечно-разностным соотношениям. Предлагаемый метод принадлежит к семейству методов, основанных на решении задачи распада произвольного разрыва, и базируется на последовательном решении классических уравнений мелкой воды на ровной плоскости методом Годунова с учетом влияния вертикальной неоднородности течения при расчете потоков через границы ячеек, примыкающих к ступенчатым границам. Учет вертикальной неоднородности обеспечивается использованием решения задачи Римана на ступеньке на основе квазидвухслойной модели мелкой воды, описанной в разд. 1.4 (*Karelsky et al.*, 2006).

Помимо задач с источником в виде неоднородной подстилающей поверхности в природе существует большое количество задач с дополнительным внешним источником, в частности задачи исследования вращающейся мелкой воды. Для изучения течений жидкости в присутствии внешних источников также разработаны и успешно применяются приближения мелкой воды. Уравнения мелкой воды в случае присутствия внешних источников в силу своей нелинейности оказались достаточно сложными для построения общих аналитических решений, однако успешно интегрируются численно. Разделы 2.4, 2.5 посвящены разработке численного метода моделирования течений вращающейся мелкой воды, основанного на идее представления силы Кориолиса фиктивной нестационарной границей. Это создает важные преимущества для моделирования таких течений на неровной границе, сводя задачу к моделированию течений мелкой воды над нестационарной эффективной поверхностью. Особое внимание в данном разделе уделяется проблемам, которые возникают при дискретизации фиктивной нестационарной границы, описывающей вращение, и путям преодоления этих проблем.

Плодотворность заимствования методов, разработанных для комплексных подстилающих поверхностей, при решении задач с силой Кориолиса, по-видимому, ни у кого не вызывает сомнения. Однако влияние орографии, очевидно, напрямую приводит к существованию работы подстилающей поверхности над потоком жидкости, в то

время как сама по себе сила Кориолиса работы совершать не может. В данном разделе обсуждается физическая интерпретация указанного формального заимствования, и анализируются границы применимости данного подхода в целом, для расщепляющихся разностных схем. Главная проблема при построении расщепляющейся разностной схемы состоит в необходимости постановки и решения одномерной задачи, не имеющей физического эквивалента для конечных временных интервалов. К сожалению, наиболее очевидный путь пренебрежения одной из пространственных координат не решает полностью проблемы. Действительно, отказ от одной из пространственных переменных при решении существенно двумерной задачи приводит к нарушению закона сохранения импульса, что, в свою очередь, приводит к необходимости введения некоторой фиктивной работы для компенсации указанных нарушений, несмотря на всю нефизичность такой компенсации.

Метод, предлагаемый в разд. 2.4, не позволяет полностью обойти указанные трудности, однако используемое квазидвухслойное представление позволяет точнее определить структуру течения внутри рассматриваемой пространственно-временной области для глубины жидкости и одной из составляющих вектора скорости. Это позволяет в предположении стационарности пересчитать трансверсальную скорость и, тем самым, минимизировать паразитные явления, математически обусловленные отказом от интегрирования уравнения для трансверсальной составляющей вектора скорости, что с физической точки зрения индуцирует нескомпенсированную работу силы Кориолиса внутри потока.

В разд. 2.6 работоспособность метода подтверждена проведенным численным экспериментом по моделированию классической задачи геострофической адаптации, известной как задача Россби. Наблюдается хорошее совпадение характерных пиков разбегающихся акустико-гравитационных волн и центральной уравновешенной части с известными геофизическими данными, что свидетельствует об эффективности использования квазидвухслойной модели при описании крупномасштабных геофизических явлений. Проведено сравнение величин потенциальной завихренности в начальный и конечный моменты времени для классической задачи Россби. Выявлено сохранение инварианта  $Q$  — потенциального вихря со временем. Получено, что максимум функции сдвигается в антициклонную область, а минимум потенциальной завихренности со временем увеличивается. Данные результаты определяются чисто нелинейными эффектами и

хорошо согласуются с известными данными геофизических исследований.

В разд. 2.7 для расчета течений мелкой воды над произвольной поверхностью в присутствии силы Кориолиса предлагается модернизированный метод Годунова, адаптирующийся к параметрам потока. Отличительной особенностью квазидвухслойной модели является разделение исследуемого течения на два слоя при расчете потоковых величин вблизи каждой ступеньки, с улучшением аппроксимации исходных трехмерных уравнений Эйлера. Однозначность такого разделения на два слоя, обеспечивается единственностью решения обратной задачи Дирихле для нахождения этой границы. Адаптируясь к параметрам потока, метод позволяет учитывать особенности течения жидкости в каждой точке пространства и в каждый момент времени. Разработанный численный алгоритм обобщен в разд. 2.8 на случай произвольной внешней силы, которая также может быть представлена фиктивной подстилающей границей.

### 2.2. Конечно-разностная схема для уравнений мелкой воды над подстилающей поверхностью произвольного профиля

Основная идея разработанной разностной схемы состоит в том, чтобы, не нарушая аппроксимации уравнений мелкой воды, учесть влияние эффектов, обусловленных вертикальными градиентами горизонтального поля скорости, на осредненное по глубине поле. В реальных задачах с большими расчетными областями и сложной структурой дна неизбежно возникают области, в которых приближения мелкой воды, строго говоря, не применимы. Действительно, течения в них становятся существенно трехмерными, усложняясь застойными зонами, зонами возвратных течений. Естественно, что подробное описание поведения течений в этих областях возможно лишь при решении уравнений Эйлера, а зачастую и полных уравнений Навье–Стокса. Однако крупномасштабное влияние этих локальных зон на осредненное по глубине поле скорости необходимо учитывать для получения адекватных результатов.

Запишем уравнения Сен-Венана для течений жидкости над неоднородной поверхностью в дивергентном виде для заданного профиля дна (Stoker, 1957):

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \frac{db}{dx}, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh \frac{db}{dy}. \end{cases} \quad (2.1)$$

В системе уравнений (2.1):  $g$  — ускорение свободного падения;  $h(x, y, t)$  — глубина жидкости;  $u(x, y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости в направлении  $x$ ;  $v(x, y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости в направлении  $y$ ;  $b(x, y)$  — функция, задающая рельеф дна.

В основу разностной схемы положен метод Годунова, использующий интегральную форму уравнений законов сохранения. Запишем (2.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \iiint_G \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \right) dx dy dt = 0, \\ \iiint_G \left( \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} + gh \frac{db}{dx} \right) dx dy dt = 0, \\ \iiint_G \left( \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} + gh \frac{db}{dy} \right) dx dy dt = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $G(x, y, t)$  — произвольная ненулевая пространственно-временная область.

Для построения сетки подстилающая поверхность аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, т. е. граница представляется совокупностью горизонтальных и вертикальных участков плоскостей так, что каждая ячейка принадлежит участку подстилающей поверхности с ровным горизонтальным дном. Очевидно, что при таком построении сетки каждая ячейка обладает собственной высотой дна, вообще говоря, различной для каждой ячейки. Данный способ

построения сетки может легко автоматизироваться, при условии, что выдерживаются ограничения на максимальный перепад высот, допустимый для каждой ячейки, не принадлежащей области скачкообразных изменений профиля подстилающей поверхности. В некоторых задачах полезно затем регуляризовать сетку, измельчая до размеров минимальной полученной ячейки или до характерных размеров поставленной задачи. После этого начальные условия задачи представляются сеточной функцией, которая ставит в соответствие каждой ячейке с номером  $(x, y)$  три осредненные по ее площади величины:  $H_{x,y}^0$  — глубину жидкости;  $\{V_{x,y}^0, U_{x,y}^0\}$  — вектор скорости жидкости и  $B_{x,y}$  — высоту подстилающей поверхности. Переходя в (2.2) к поверхностным интегралам, получим интегральную форму законов сохранения (2.1):

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_S h \, dx \, dy + \iint_S hu \, dy \, dt + \iint_S hv \, dx \, dt = 0, \\ & \iint_S hu \, dx \, dy + \iint_S \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) dy \, dt + \iint_S huv \, dx \, dt + \\ & + \iint_G gh \frac{db}{dx} \, dx \, dy \, dt = 0, \\ & \iint_S hv \, dx \, dy + \iint_S \left( hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) dx \, dt + \iint_S hvu \, dy \, dt + \\ & + \iint_G gh \frac{db}{dy} \, dx \, dy \, dt = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

где  $S$  — граница области  $G(x, y, t)$ .

Применим интегральные законы сохранения (2.3) к каждой ячейке, т. е. выбирая в качестве  $S$  поверхность, определяемую гранью ячейки за временной шаг, и полагая, что на границе ячейки значения всех гидродинамических параметров остаются неизменными на протяжении временного шага интегрирования, получим разностную схему (где  $\tau$  — шаг по времени;  $X$  и  $Y$  — шаги по пространству;  $H$  — глубина жидкости;  $U$  — скорость в направлении  $x$ ;  $V$  — скорость в направлении  $y$ . Нижние индексы  $x, y$  — значения функции, отнесенные к центру масс ячейки с номером  $(x, y)$ ; полунижние индексы  $x \pm 1/2, y \pm 1/2$  — значения величин на границе между ячейками с номерами

$x, x \pm 1$  и  $y, y \pm 1$  соответственно; верхний индекс  $t$  обозначает номер шага по времени;  $B_{x,y}$  — высота дна ячейки с номером  $(x, y)$ ):

$$\begin{aligned} H_{x,y}^{t+1} &= H_{x,y}^t + \tau \times \left[ \frac{H_{x-1/2,y}^t U_{x-1/2,y}^t - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t}{X} + \frac{H_{x,y-1/2}^t V_{x,y-1/2}^t - H_{x,y+1/2}^t V_{x,y+1/2}^t}{Y} \right], \\ U_{x,y}^{t+1} &= \tau \times \frac{\left[ \frac{g \left( H_{x-1/2,y}^t + i(B_{x,y} - B_{x-1,y}) \right)^2}{2} + H_{x-1/2,y}^t \left( U_{x-1/2,y}^t \right)^2 - \frac{g \left( H_{x+1/2,y}^t + i(B_{x+1,y} - B_{x,y}) \right)^2}{2} - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t \right]}{2 X H_{x,y}^{t+1}} + \\ & + \frac{H_{x,y}^t U_{x,y}^t}{H_{x,y}^{t+1}} + \tau \frac{H_{x,y-1/2}^t U_{x,y-1/2}^t V_{x,y-1/2}^t - H_{x,y+1/2}^t U_{x,y+1/2}^t V_{x,y+1/2}^t}{Y H_{x,y}^{t+1}}, \quad (2.4) \\ V_{x,y}^{t+1} &= \tau \times \frac{\left[ \frac{g \left( H_{x,y-1/2}^t + i(B_{x,y} - B_{x,y-1}) \right)^2}{2} + H_{x,y-1/2}^t \left( U_{x,y-1/2}^t \right)^2 - \frac{g \left( H_{x,y+1/2}^t + i(B_{x,y+1} - B_{x,y}) \right)^2}{2} - H_{x,y+1/2}^t U_{x,y+1/2}^t \right]}{2 Y H_{x,y}^{t+1}} + \\ & + \frac{H_{x,y}^t V_{x,y}^t}{H_{x,y}^{t+1}} + \tau \times \frac{H_{x-1/2,y}^t U_{x-1/2,y}^t V_{x-1/2,y}^t - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t V_{x+1/2,y}^t}{X H_{x,y}^{t+1}}, \end{aligned}$$

Следует обратить внимание, что применение кусочно-постоянной сетки, очевидно, привело к исчезновению из разностной схемы (2.4) слагаемых, отвечающих за изменение геометрии подстилающей поверхности. В дальнейшем будет показано, что использование специальной процедуры расчета значения гидродинамических величин на гранях ячеек, основанной на квазидвухслойной модели течения мелкой воды, описанной в разд. 1.4, позволяет адекватно описать эффекты, обусловленные изменением профиля поверхности. В работе

(Беликов, Семенов, 1997) аналогичные слагаемые также были учтены в явном виде при подсчете баланса массы и импульса внутри каждой ячейки, а для определения потоков через границу ячеек — неявно, посредством перераспределения уровня жидкости в ячейках, в зависимости от угла наклона дна, на каждом временном шаге. Очевидно, что предлагаемый в настоящей работе подход опосредованно приводит к перераспределению уровня жидкости по длине ячейки, но при этом потоковые члены рассчитываются оригинальным способом, что позволяет точнее учитывать эффекты, связанные с работой, совершаемой подстилающей поверхностью над жидкостью.

Каждая заданная грань ячейки расчетной области состоит в общем случае из двух частей: из части, аппроксимирующей подстилающую поверхность, и оставшейся части, через которую осуществляется свободное течение жидкости. Формально, с точки зрения приближения мелкой воды, первая часть отсутствует, хотя для исходных уравнений Эйлера, она, фактически являясь подстилающей поверхностью, — граница, на которой выполнено условие непротекания. При выводе уравнений мелкой воды граничное условие на ней учитывается в самом уравнении, что, очевидно, не изменяет природу ее взаимодействия с потоком жидкости. Поэтому члены, отвечающие в разностной схеме за работу, имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g \left( H_{x-1/2,y}^t + i \left( B_{x-1,y} - B_{x,y} \right) \right)^2, \quad \frac{1}{2} g \left( H_{x+1/2,y}^t + i \left( B_{x+1,y} - B_{x,y} \right) \right)^2, \\ & \frac{1}{2} g \left( H_{x,y-1/2}^t + i \left( B_{x,y-1} - B_{x,y} \right) \right)^2, \quad \frac{1}{2} g \left( H_{x,y+1/2}^t + i \left( B_{x,y+1} - B_{x,y} \right) \right)^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где слагаемые  $i \left( B_{x\pm 1,y} - B_{x,y} \right)$ ,  $i \left( B_{x,y\pm 1} - B_{x,y} \right)$  описывают работу перепада высот над потоком жидкости. Переменная  $i$  принимает значение либо 0, в случае отрицательного перепада соответствующих высот  $\left( B_{x\pm 1,y} - B_{x,y} \right)$ ,  $\left( B_{x,y\pm 1} - B_{x,y} \right)$  подстилающей границы, либо  $0 \leq i \leq 1$ , при положительном перепаде. Переменная  $i$  принимает значение, равное 1, в случае, если  $H^*$ , определяемое соотношениями (1.65), (1.66) для соответствующей грани ячейки  $(x, y)$ , не превышает значения глубины внутри нее. В противном случае значение  $i$  на соответствующей грани является отношением глубины формирующейся при полном торможении потока  $\left( H_{x,y}^t, U_{x,y}^t, V_{x,y}^t \right)$  на указанной грани, к соответствующему перепаду высот подстилающей поверхности.

Если перепад высот отсутствует, глубины  $H_{x\pm 1/2,y}^t$ ,  $H_{x,y\pm 1/2}^t$  и скорости  $U_{x\pm 1/2,y}^t$ ,  $V_{x,y\pm 1/2}^t$  жидкости вычисляются решением обычной задачи Римана на ровной плоскости, и  $i \times \left( B_{x\pm 1,y} - B_{x,y} \right)$ ,  $i \times \left( B_{x,y\pm 1} - B_{x,y} \right)$  принимают нулевые значения, и выражения (2.5), а вместе с ними и вся разностная схема (2.4), тождественно переходит в стандартную разностную схему Годунова для классических уравнений мелкой воды над ровным дном.

При наличии перепада высот подстилающей поверхности для определения глубин  $H_{x\pm 1/2,y}^t$ ,  $H_{x,y\pm 1/2}^t$  и скоростей  $U_{x\pm 1/2,y}^t$ ,  $V_{x,y\pm 1/2}^t$  жидкости, протекающей через грань, необходимо решить задачу Римана для ступенчатой границы. Перенос через грань части импульса компланарной грани ячеек, определяемой значением величин  $U_{x,y\pm 1/2}^t$ ,  $V_{x\pm 1/2,y}^t$ , как и обычно, в методах годуновского типа, считается чисто конвективным и, следовательно, определяется только направлением течения жидкости через грань ячейки. Интересные аналитические подходы к решению указанной задачи (Остапенко, 2002, 2003; Alcrudo, Benkhaldoun, 2001) не содержат явных выражений для определения потоков через границы ячеек при дискретизации интегральных законов сохранения (2.3). Кроме того, предположение о наличии стационарной зоны вблизи ступенчатой границы (Alcrudo, Benkhaldoun, 2001), вводимое по аналогии с решением газодинамической задачи о распаде разрыва начальных условий в сходящем сопле, приводит к потере некоторых физически осуществимых решений (Alcrudo, Benkhaldoun, 2001). Поскольку при таком подходе волны разряжения не могут проходить через уступ. Однако в рамках квазидвухслойной модели течения мелкой воды указанная нефизичность решения исчезает.

Условием устойчивости в данном двумерном случае будет являться стандартное условие Куранта—Фридрихса, в котором, однако, должна учитываться скорость распространения возмущений, в том числе и в фиктивном нижнем слое, т. е. шаг по времени не может превышать минимальное по всем ячейкам время, за которое возмущения проходят половину ячейки, с учетом коррекции на двумерную постановку:

$$\tau = R \frac{\Delta t_x \Delta t_y}{\Delta t_x + \Delta t_y}, \quad (2.6)$$

где  $\Delta t_x$ ,  $\Delta t_y$  — минимальные времена распространения возмущений по осям абсцисс и ординат, соответственно;  $R < 1$  — дополнительный коэффициент для увеличения надежности, в нижеприведенных расчетах принимаемый равным 0,4.

Разработанная разностная схема обеспечивает единообразие построения решения в областях как со сложной геометрией подстилающей поверхности, так и ровного дна, экономичность при работе с большими расчетными областями по пространству, учет диссипации поступательной кинетической энергии у ступеньки и возможность добавления разнообразных стоков, массовых источников, трения.

### 2.3. Численное моделирование течений жидкости над подстилающей поверхностью сложного профиля

Для проверки работоспособности квазидвухслойного метода расчета течений над подстилающими поверхностями сложного профиля была решена следующая модельная задача. В центре бесконечной плоскости, расположенной под некоторым углом наклона к горизонту  $k$ , находится столб жидкости, имеющий форму параллелепипеда. Введем систему координат таким образом, чтобы координатные линии  $x = \text{const}$  полностью принадлежали подстилающей поверхности. В момент  $t = 0$  столб воды начинает распадаться. Для получения тестовых расчетов используем хорошо зарекомендовавшую себя, многократно проверенную, разностную схему Годунова для двумерных уравнений мелкой воды над ровным дном. Постановка задачи в случае наклонной плоскости отличается лишь дополнительным постоянным членом во втором уравнении системы (2.1), описывающим закон изменения горизонтальной проекции импульса. Для решения поставленной задачи на базе классической теории мелкой воды достаточно использовать замену переменных, переводящую неоднородную систему Сен-Венана в однородную систему классической мелкой воды (Karelsky et al., 2000b). Запишем уравнения Сен-Венана (2.1) для случая наклонной плоскости, в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -gk, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Условия Коши для этой системы (2.7) в точности соответствуют начальным условиям для однородной системы над ровной плоскостью. Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \tilde{x} \rightarrow x + \frac{1}{2} gkt^2, \\ \tilde{y} \rightarrow y, \\ \tilde{t} \rightarrow t, \end{cases} \quad (2.8)$$

т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + gk\tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Как показано в работе (Karelsky et al., 2000b) преобразование (2.8), (2.9) является невырожденным, и после дополнительной замены

$$\tilde{u} \rightarrow u - gkt \quad (2.10)$$

зависимой переменной  $u$ , система (2.7) переходит в классическую систему уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Очевидно, что условия Коши инвариантны относительно замены (2.8), (2.10), поскольку при  $t = 0$  данная замена превращается в тождественную подстановку:

$$\begin{cases} \tilde{x} \rightarrow x, \\ \tilde{y} \rightarrow y, \\ \tilde{t} \rightarrow t, \\ \tilde{u} \rightarrow u. \end{cases}$$



Замена (2.8), (2.10) эквивалентна переходу в неинерциальную систему отсчета, движущуюся с постоянным ускорением  $gk$  вдоль оси  $x$ . Если  $k \neq \text{const}$ , то такая замена в общем случае невозможна из-за возникновения дополнительных динамических сил, которые приводят к вырождению якобиана преобразования (2.8):

$$I = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Kt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, в случае, когда подстилающая поверхность является наклонной плоскостью, переход в соответствующую неинерциальную систему отсчета (т. е. замена координат) позволяет устранить свободный член в системе уравнений Сен-Венана (2.7) и оперировать с классической системой уравнений мелкой воды (2.11). Следует подчеркнуть, что для комплексной подстилающей поверхности, даже в простейшем случае комбинации наклонной и горизонтальной плоскостей, данная замена не работает, поэтому указанный подход можно использовать лишь для осуществления тестовых расчетов.

Для проверки предлагаемого метода будем использовать решение задачи о распаде прямоугольного столба жидкости на горизонтальной плоскости с учетом обратной замены координат:

$$\begin{cases} x \rightarrow \tilde{x} - \frac{1}{2} g k \tilde{t}^2, \\ y \rightarrow \tilde{y}, \\ t \rightarrow \tilde{t}, \\ u \rightarrow \tilde{u} + g k \tilde{t}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Аппроксимируем наклонную плоскость системой уступов с постоянным шагом по пространству. Выбранная задача о распаде столба жидкости наиболее показательна для проверки применимости метода, поскольку одновременно сочетает в себе все возможные типы решений. Сравнения проводились для случаев покоящейся жидкости и жидкости, текущей вверх по наклонной плоскости (рис. 2.1, 2.2). Были взяты следующие начальные данные: распад разрыва столба жидкости высотой 1 м и квадратным основанием со стороной 2 м

над наклонной плоскостью (величина наклона 1:20), покрытой жидкостью. В первом численном эксперименте жидкость покоилась, во втором натекала на плоскость со скоростью 2 м/с. Начальная глубина в обоих экспериментах составляла 0,5 м повсюду, вне области занятой распадающимся столбом жидкости. Пунктирной линия на графиках — начальные параметры потока; сплошной линией показана глубина и скорость потока, полученные с помощью предложенной гидродинамической модели; точечной — с помощью стандартный метод Годунова для мелкой воды на ровной плоскости с последующей заменой переменных.

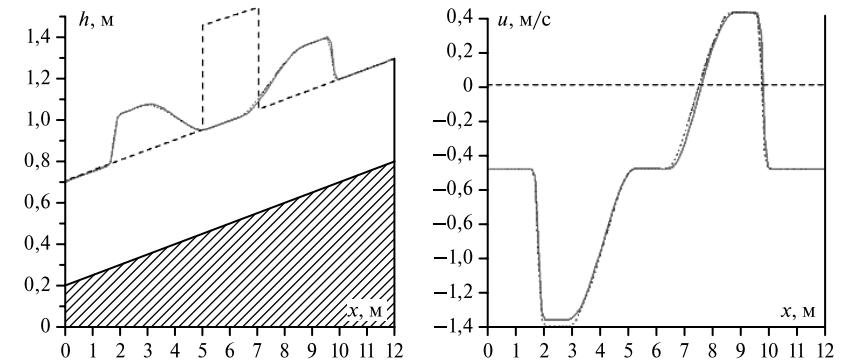


Рис. 2.1. Глубина и скорость потока жидкости над наклонной поверхностью,  $t = 1$  с в сечении плоскостью симметрии  $y = 0$

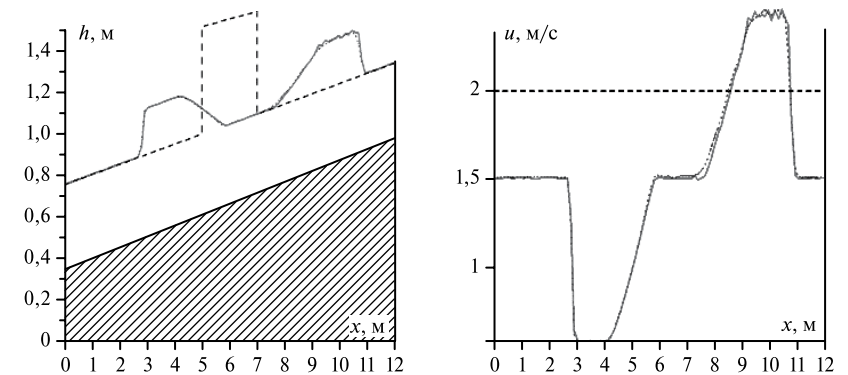


Рис. 2.2. Глубина и скорость потока жидкости над наклонной поверхностью с натеканием жидкости,  $t = 1$  с в сечении плоскостью симметрии  $y = 0$

На рис. 2.1, 2.2 выявлена практически полная аналогия между результатами, полученными с помощью представленной модели, и расчетом, использующим замену переменных, что свидетельствует об эффективности применения модели при описании таких физических явлений. Возникающие колебания за фронтом ударных волн находятся внутри погрешности метода и со временем не приводят к нарушению устойчивости.

В данном разделе представлены и проанализированы расчеты движения жидкости над подстилающими поверхностями различного вида. Выше были рассмотрены наклонные поверхности, с натеканием или стеканием жидкости. Здесь рассмотрим горизонтальные поверхности с ямой или столбом квадратной формы в центре, а именно, моделирование течений на границах с резким перепадом высот, а также поверхности с переходами ровной подстилающей поверхности в наклонную, т. е. моделирование течений на границе, содержащей особую точку, соединяющую два различных течения, соответствующих различным дифференциальным системам уравнений. Данные расчеты описывают весь набор различных особенностей подстилающих поверхностей и позволяют говорить об эффективности применения предложенного метода при описании сложных подстилающих поверхностей, включающих различные комбинации таких особенностей. В конце раздела представлен результат расчета течения жидкости над сложной подстилающей поверхностью, включающей все описанные выше виды и особенности подстилающей поверхности.

На рис. 2.3–2.6 представлены результаты моделирования течения жидкости при наличии резких перепадов уровня дна в двумерном рассмотрении. На рис. 2.3, 2.4 приведено решение задачи о падении столба жидкости над плоской подстилающей поверхностью с углублением квадратной формы в центре расчетной области. Размер расчетной области  $60 \times 60$  м, используется регулярная сетка  $60 \times 60$ . В центре расчетной области углубление глубиной 1 м и размером  $20 \times 20$  м. Начальные условия: глубина жидкости равна 1 м по всему размеру расчетной области, кроме центра, где в момент времени  $t = 0$  расположен столб жидкости высоты 4 м; жидкость покоится во всей расчетной области. На рис. 2.3 представлена глубина потока жидкости через 3 с.

На рис. 2.4 представлены две проекции свободной поверхности жидкости при  $X = \text{const} = 30$  м и  $Y = \text{const} = 30$  м соответственно, иллюстрирующие ожидаемую симметрию решения, определяемую симметричностью начальных и граничных условий и постановкой задачи.

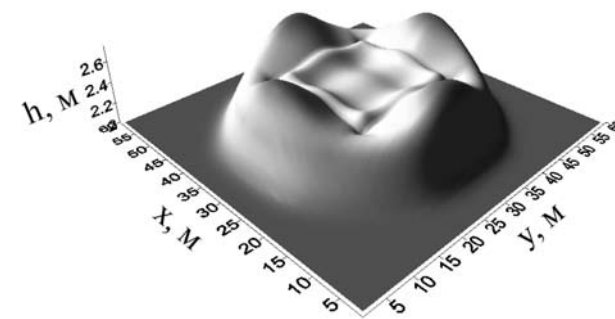


Рис. 2.3. Глубина потока жидкости,  $t = 3$  с

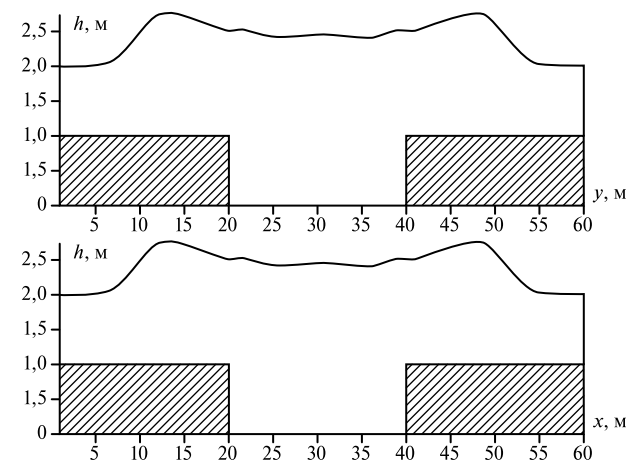
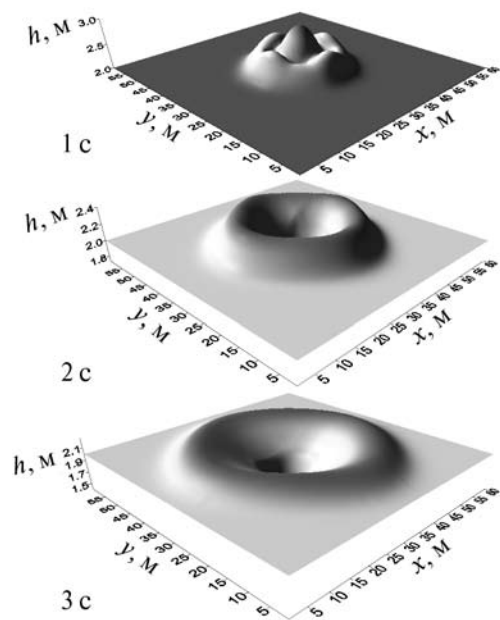


Рис. 2.4. Проекция свободной поверхности жидкости

Результаты моделирования падения столба жидкости высоты 3 м и продольными размерами  $10 \times 10$  м над подстилающей поверхностью, имеющей особенность в виде прямоугольного параллелепипеда высотой 1 м и квадратным основанием  $10 \times 10$  м представлены на рис. 2.5, 2.6. В начальный момент времени расчетная область затоплена жидкостью глубиной 2 м. Задача моделирует формирование волн цунами при землетрясениях в океане, когда происходит резкое изменение уровня дна под действием тектонических сил. Эволюция падения показана на рис. 2.5. Наблюдается образование волны цунами, распространяющейся во всех направлениях.

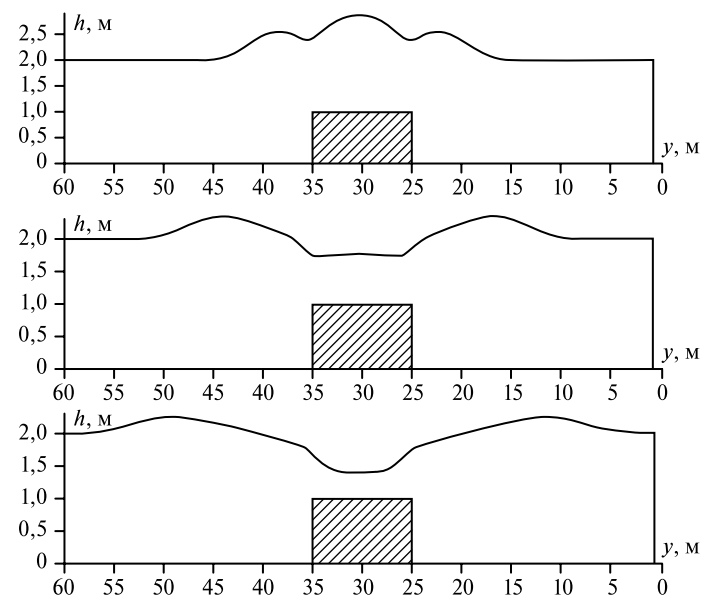


**Рис. 2.5.** Эволюция падения столба жидкости над подстилающей поверхностью наполненной жидкостью с выступающей из дна особенностью в виде параллелепипеда

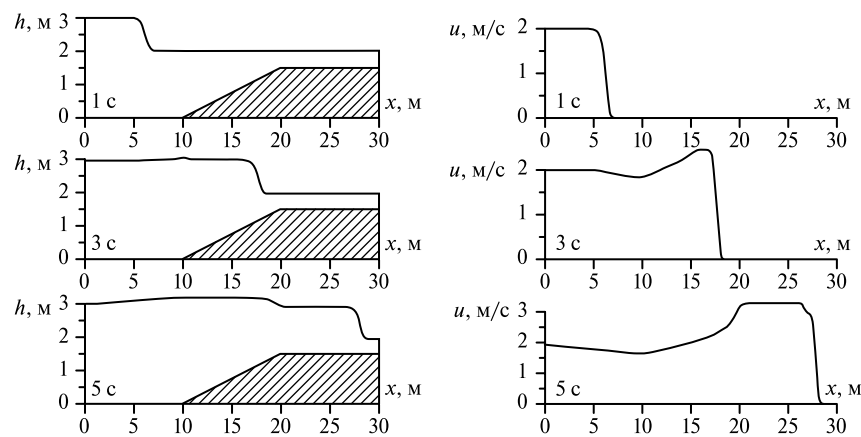
На рис. 2.6 представлены проекции свободной поверхности жидкости при  $y = \text{const} = 30$  м.

На рис. 2.7–2.10 приведены результаты моделирования течений над границей с переходами ровной подстилающей поверхности в наклонную, а именно, моделирования при наличии особой точки, соединяющей два различных течения, соответствующих различным системам дифференциальных уравнений. На рис. 2.7 представлены результаты натекания ударной волны на наклонный берег (в природе данная ситуация аналогична натеканию волны цунами на прибрежную зону), аппроксимируемый ступеньками (количество ступенек равно 100, величина наклона 1:6,66). Высота натекающей волны равна 1 м, скорость 2 м/с. Эволюция волновой картины и скорости на береговой линии показана с интервалом в две секунды.

При набегании ударной волны на наклонный берег наблюдается небольшое увеличение ее интенсивности и значительное увеличение скорости.



**Рис 2.6.** Эволюция падения столба жидкости над подстилающей поверхностью с выступающей из дна особенностью в виде параллелепипеда (проекция свободной поверхности жидкости при  $y = \text{const} = 30$  м)



**Рис. 2.7.** Эволюция натекания ударной волны на наклонный берег, аппроксимируемый ступеньками

Для сравнения представлены результаты (см. рис. 2.8), полученные в работе (Toro, 1992). Наблюдается хорошее совпадение волновой картины в обоих методах.

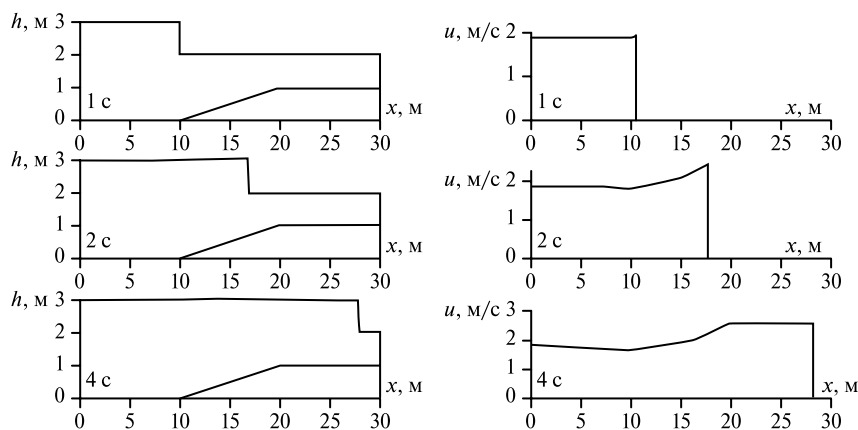


Рис. 2.8. Эволюция натекания ударной волны на наклонный берег, представленная в работе (Toro, 1992)

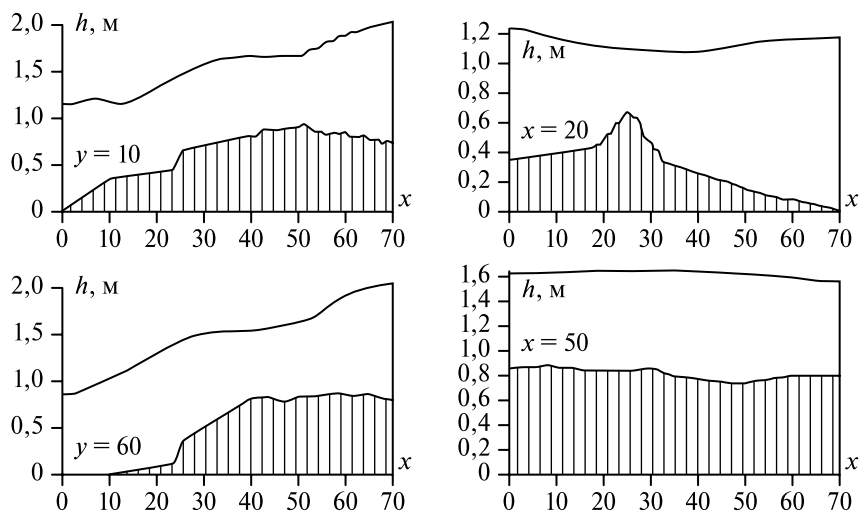


Рис. 2.9. Проекция подстилающей поверхности и свободной поверхности жидкости

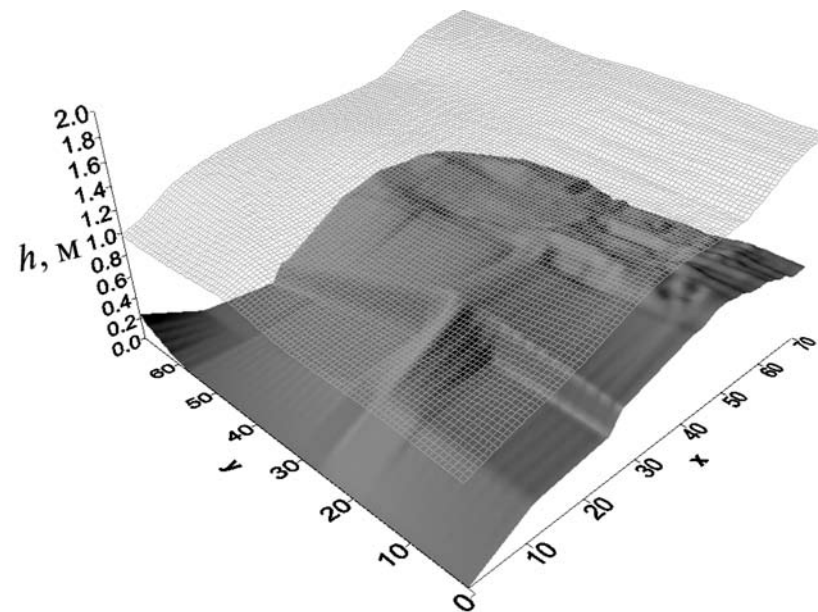


Рис. 2.10. Поток жидкости над неоднородной подстилающей поверхностью в момент времени 2 с

Рассмотрим течение жидкости над сложной подстилающей поверхностью включающей все описанные выше особенности подстилающих поверхностей. Для расчетной области  $20 \times 20$  м была использована регулярная сетка размером  $70 \times 70$  (4900 ячеек). Начальные параметры потока жидкости: глубина потока во всей расчетной области 1 м, скорость течения в направлении  $x$  — 1 м/с, в направлении  $y$  — 0 м/с. Граничные условия: протекание через грани  $x = 0$ ,  $x = 70$ , отражение через грани  $y = 0$ ,  $y = 70$ . Таким образом, моделируется протекание жидкости над неоднородной подстилающей поверхностью в открытом канале. На рис. 2.9 представлены четыре проекции подстилающей поверхности и свободной поверхности жидкости при  $y = \text{const} = 10$ ,  $y = \text{const} = 60$  и  $x = \text{const} = 20$ ,  $x = \text{const} = 50$  в момент времени 2 с, иллюстрирующие сложный профиль подстилающей поверхности, включающий весь набор рассмотренных выше особенностей.

Поток жидкости в момент времени 2 с в изометрии представлен на рис. 2.10.

#### 2.4. Представление силы Кориолиса в методах годуновского типа на основе квазидвухслойной модели

Введем декартову систему координат, направляя ось  $z$  коллинеарно и противоположно по направлению вектору силы тяжести (рис. 2.11). Учитывая предположения геофизичности и геострофичности течения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ll u \nabla, \quad M = \frac{U}{c} \ll 1, \quad \text{Ro} = \frac{U}{2\Omega L} \ll 1, \quad \frac{\Omega^2 L}{g} \ll 1, \quad (2.13)$$

где  $M$  — число Маха;  $\text{Ro}$  — число Россби — Кибеля;  $U$  — характерная скорость;  $L$  — характерный масштаб течения;  $c$  — скорость звука, запишем редуцированную систему уравнений Эйлера в виде системы уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \frac{db}{dx} + fvh, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh \frac{db}{dy} - fuh, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $h(x, y, t)$  — глубина жидкости или газа;  $u(x, y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости в направлении  $x$ ;  $v(x, y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости в направлении  $y$ ;  $b(x, y)$  — функция, задающая рельеф дна;  $f = 2\Omega \sin f\varphi$  — параметр Кориолиса, где  $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$  — частота вращения Земли;  $\varphi$  — широта. Первое уравнение в системе (2.14) является законом сохранения массы, второе и третье — законами сохранения импульса для соответствующих компонент вектора скорости.

Данная глава посвящена решению класса задач, характерный размер которых таков, что кривизна поверхности пренебрежимо мала и не оказывает значительного влияния. Однако частично эффект кривизны земной поверхности принимается во внимание учетом изменения с широтой параметра Кориолиса  $f$ . Введенное Россби  $\beta$ -приближение предполагает, что  $f$  меняется линейно при движении по

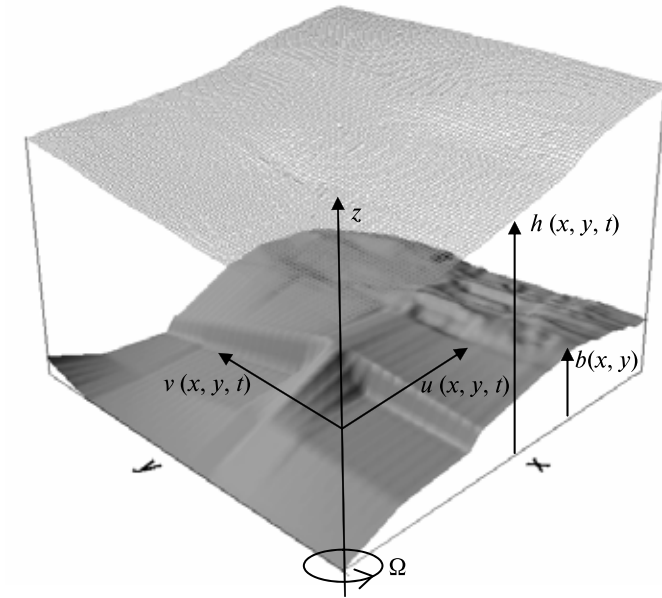


Рис. 2.11. Вращающийся слой жидкости над неоднородной поверхностью

меридиану Земли. Действительно, если принять широту  $\varphi_0$  началом декартовой системы координат, то  $f$  можно разложить в ряд Тейлора следующим образом:

$$f(\varphi_0 + \delta\varphi) = f(\varphi_0) + \delta\varphi f'(\varphi_0) + O(\delta\varphi^2). \quad (2.15)$$

Учитывая, что для малого  $\delta\varphi$  выполняется тождество  $y = R\delta\varphi$  и пренебрегая квадратичными членами в (2.15), получим

$$f = 2\Omega \sin \varphi_0 + \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{R} y = f_0 + \beta y, \quad (2.16)$$

где  $R$  — радиус Земли и  $\beta = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{R}$ .

Наличие хорошо разработанного и апробированного численного аппарата вкупе с многократно протестированной программной реализацией сделало особенно привлекательным сведение решения задачи о вращающейся мелкой воде над ровной подстилающей поверхностью к решению задачи о течениях мелкой воды над комплексной нестационарной границей. Вообще говоря, даже формальное

рассмотрение в уравнениях силы Кориолиса как члена, описывающего изменяющуюся геометрию подстилающей поверхности, не является вполне корректным. Действительно, для получения формального совпадения вида уравнений их необходимо представить в следующем виде:

$$fv = -g \frac{\partial}{\partial x} k, \quad fu = g \frac{\partial}{\partial y} k. \quad (2.17)$$

Тогда функция  $k(x, y, t)$  будет фиктивной границей, отвечающей за влияние силы Кориолиса. Система (2.14) для ровной подстилающей поверхности в присутствии силы Кориолиса переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \frac{dk}{dx}, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh \frac{dk}{dy}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Как нетрудно видеть, такое представление существенно сужает класс возможных решений, исключая из рассмотрения пространственно неинтегрируемые поля скорости.

Соответствующая одномерная задача, получаемая редукцией данной системы (2.18) по одной из пространственных координат с точностью до проекции уравнения импульсов на нередуцированное пространственное направление, соответствует одномерной задаче уравнений мелкой воды над нестационарной комплексной подстилающей поверхностью. Пренебрегая в (2.18) производными для определенности, например, по  $y$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} = fhu, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -fhu. \end{cases} \quad (2.19)$$

Основополагающей для всех методов годового типа является задача распада произвольного разрыва, т. е. одномерная постановка задачи Коши для двух полубесконечных областей, в каждой из которых значения всех гидродинамических параметров постоянны в начальный момент времени. Очевидно, что при наличии силы Кориолиса такая задача имеет физический смысл лишь для достаточно малого временного промежутка, поскольку ее общее решение ищется в виде совокупности частных автомодельных решений. Для простоты изложения будем считать, что в обеих областях все гидродинамические параметры совпадают, кроме трансверсальной, относительно границы областей, составляющей скорости. С физической точки зрения это означает, что поток жидкости, проходя через границу областей, теряет часть импульса, переходящую под влиянием силы Кориолиса в импульс перпендикулярного направления (рис. 2.12). Однако в одномерном представлении такой переход, безусловно, носит диссипативный характер, следовательно, в модельном представлении он эквивалентен торможению потока в исследуемом направлении. С учетом замены (2.17) в конечно-разностной реализации, для достаточно малого промежутка времени возможно указать некую фиктивную высоту ступеньки, определяемую разностью значений трансверсальных составляющих вектора в соседних областях, воспроизводящую воздействие силы Кориолиса (рис. 2.13). Таким образом, поток может быть разделен на две части, нижнюю, с параметрами потока  $h_1$  и  $u_1$ , в которой происходит задержание переноса массы, и верхнюю, с параметрами потока  $h_2$  и  $u_2$ , формирующуюся в результате этого задержания.

Если ввести разностную сетку с пространственным шагом  $X$  в направлении  $x$  и рассмотреть две соседние ячейки по  $x$ , то согласно

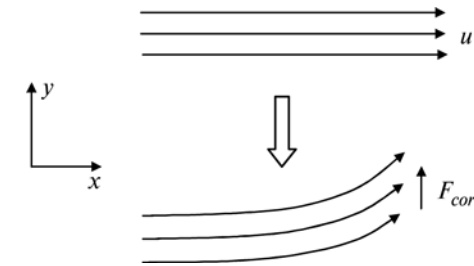


Рис. 2.12. Влияние силы Кориолиса на поток жидкости

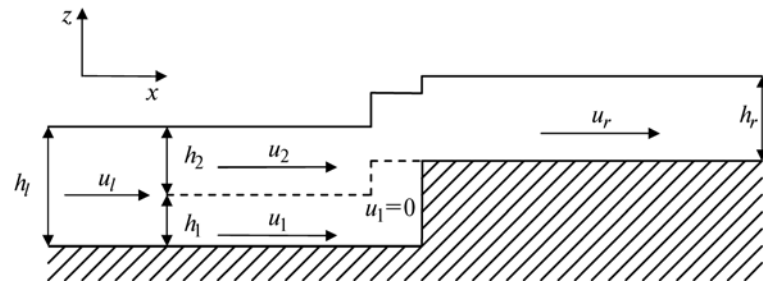


Рис. 2.13. Квазидвухслойное представление

формуле (2.17), в левой ячейке будем иметь (усредняя по ячейке) фиктивную границу с тангенсом угла наклона  $f\nu_l X/g$  и  $f\nu_r X/g$  — в правой ячейке. Тогда разница средних высот фиктивной поверхности на границе двух соседних ячеек составит

$$\frac{|f\nu_r X/g + f\nu_l X/g|}{2}. \quad (2.20)$$

Таким образом, интерпретация члена в уравнениях (2.14), содержащего параметр Кориолиса как некую фиктивную границу, приобретает физический смысл. Действительно, аппроксимируем подстилающую поверхность кусочно-постоянной функцией, т. е. представим ее совокупностью горизонтальных и вертикальных участков плоскостей так, что каждая ячейка принадлежит участку подстилающей поверхности с ровным горизонтальным дном; тогда граница каждой ячейки будет содержать фиктивную ступенчатую границу, определяемую соотношением (2.20).

В результате задача расчета потоков мелкой воды в присутствии силы Кориолиса становится идентична задаче расчета потоков мелкой воды над нестационарной неоднородной подстилающей поверхностью. Предложенный квазидвухслойный метод расчета потоков мелкой воды над неоднородной подстилающей поверхностью, применим и в случае нестационарных подстилающих поверхностей. В работах (Карельский и др., 2004; Рождественский, Яненко, 1978) показано, что метод успешно преодолевает проблему возмущений, вносимых особенностями аппроксимации неровной поверхности, обуславливаемых негидростатичностью давления и зависимостью горизонтальной

скорости от вертикальной координаты. В разд. 1.6, 1.7, 2.6–2.8 метод апробирован на различных гидродинамических задачах, сопоставлен с аналитическими решениями и отлично себя зарекомендовал в сравнении с наиболее известными на данный момент методами расчета течений над неоднородными поверхностями, в том числе и нестационарными.

Основная идея квазидвухслойной модели, учитывающей влияния силы Кориолиса на поток, как показано выше, состоит в разбиении потока жидкости или газа на две части, так что для верхней части влияние силы Кориолиса косвенно, а для нижней части сила Кориолиса влияет непосредственно, останавливая перенос массы в этой части потока (см. рис. 2.13), где  $h_1$  и  $u_1$  — параметры потока слева от фиктивной ступенчатой границы,  $h_r$  и  $u_r$  — справа). В зависимости от параметров потока у ступенчатой границы вычисляются глубины нижнего и верхнего слоев жидкости, и с целью вычисления параметров потока на грани решается классическая задача Римана для параметров верхнего слоя. Предложенный метод адаптируется к параметрам потока и позволяет учитывать особенности течения жидкости в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

Применение квазидвухслойной модели позволило определить структуру вертикальной неоднородности течения под влиянием силы Кориолиса, представленной фиктивной подстилающей поверхностью. Действительно, рассмотрим структуру течения у ступенчатой границы (рассмотрим сразу область, по которой будем проводить интегрирование, для нахождения трансверсальной составляющей скорости, — половину ячейки, примыкающей к ступенчатой границе слева) в случаях натекания и стекания жидкости. На рис. 2.14, 2.15

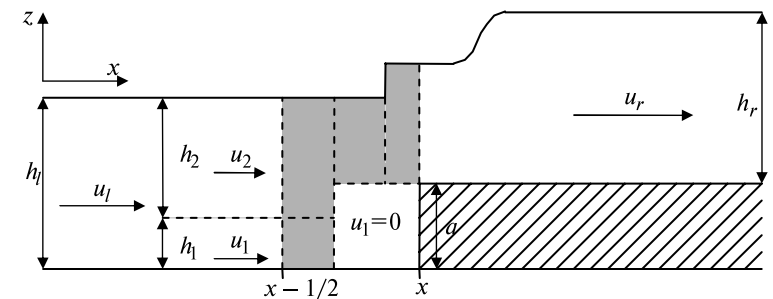


Рис. 2.14. Структура течения при натекании жидкости

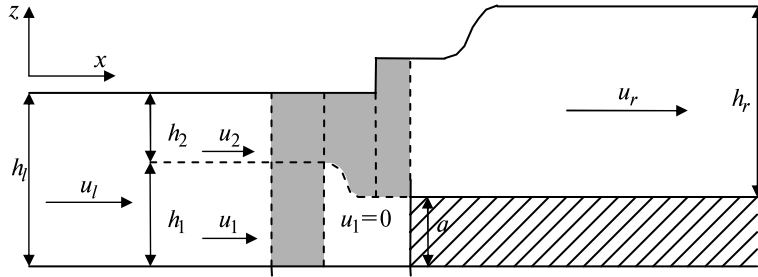


Рис. 2.15. Структура течения при стекании жидкости

показаны примеры возможной волновой картины. В общем случае, в зависимости от параметров потока возможны другие волновые картины, что учтено при разработке численного алгоритма.

Тогда из третьего уравнения системы (2.19) можно в стационарном случае вычислить изменение трансверсальной скорости:

$$V_{x+1/2} = \frac{H_x U_x V_x - f \int_x^{x+1/2} hu \, dx}{H_{x+1/2} U_{x+1/2}}, \quad (2.21)$$

где значение интеграла  $\int_x^{x+1/2} hudx$  определяется площадью заштрихованной серым цветом на рис. 2.14, 2.15.

### 2.5. Метод Годунова для уравнений вращающейся мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью с применением квазидвухслойного метода

Для получения разностной схемы проинтегрируем систему уравнений двухслойной вращающейся мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью:

$$\left\{ \begin{aligned} & \iiint_G \left( \frac{\partial(h_1 + h_2)}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial y} + \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial y} \right) dx \, dy \, dt = 0, \\ & \iiint_G \left( \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial \left( h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial h_1 u_1 v_1}{\partial y} + \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial \left( h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial h_2 u_2 v_2}{\partial y} - f h_1 v_1 - f h_2 v_2 + g \frac{\partial h_2 h_1}{\partial x} \right) dx \, dy \, dt = 0, \\ & \iiint_G \left( \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial \left( h_1 v_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right)}{\partial y} + \frac{\partial h_1 v_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial \left( h_2 v_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right)}{\partial y} + \frac{\partial h_2 v_2 u_2}{\partial x} + f h_1 u_1 + f h_2 u_2 + g \frac{\partial h_2 h_1}{\partial x} \right) dx \, dy \, dt = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

где  $G(x, y, t)$  — произвольная ненулевая область, гомеоморфная пространственно-временному кубу;  $h_1, u_1$  — параметры нижнего слоя;  $h_2, u_2$  — параметры верхнего слоя. Переходя в (2.22) к поверхностным интегралам, получим следующую интегральную форму:

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_S (h_1 + h_2) dx \, dy + h_1 u_1 \, dy \, dt + h_1 v_1 \, dx \, dt + h_2 u_2 \, dy \, dt + h_2 v_2 \, dx \, dt = 0, \\ & \iint_S (h_1 u_1 + h_2 u_2) dx \, dy + \left( h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 + h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 + g h_1 h_2 \right) dy \, dt + \\ & + (h_1 u_1 v_1 + h_2 u_2 v_2) dx \, dt - \iiint_G (f h_1 v_1 + f h_2 v_2) dx \, dy \, dt = 0, \\ & \iint_S (h_1 v_1 + h_2 v_2) dx \, dy + \left( h_1 v_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 + h_2 v_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 + g h_1 h_2 \right) dx \, dt + \\ & + (h_1 v_1 u_1 + h_2 v_2 u_2) dy \, dt + \iiint_G (f h_1 u_1 + f h_2 u_2) dx \, dy \, dt = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.23)$$

где  $S$  — граница области  $G(x, y, t)$ . Применим интегральные законы сохранения (2.23) к каждой ячейке, выбирая в качестве  $S$  поверхность,



определяемую границей ячейки за временной шаг  $\tau$ , учитывая, что на границах ячейки

$$\begin{aligned} x = x_1 &\Rightarrow h_1 + h_2 = \tilde{H}, & h_1 = k_{1,y}, & u_1 = 0, & u_2 = \tilde{U}; \\ x = x_2 &\Rightarrow h_1 + h_2 = \tilde{H}, & h_1 = k_{2,y}, & u_1 = 0, & u_2 = \tilde{U}; \\ y = y_1 &\Rightarrow h_1 + h_2 = \tilde{H}, & h_1 = k_{x,1}, & v_1 = 0, & v_2 = \tilde{V}; \\ y = y_2 &\Rightarrow h_1 + h_2 = \tilde{H}, & h_1 = k_{x,2}, & v_1 = 0, & v_2 = \tilde{V} \end{aligned}$$

и учитывая тождество:  $gh_1^2/2 + gh_2^2/2 + gh_1h_2 \equiv g(h_1 + h_2)^2/2$ , а также соотношения, вытекающие из представления (2.17):

$$\begin{aligned} &\int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} f \tilde{H} \tilde{V} \, dx \, dy \, dt = \\ &= \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} (gh_2 k_{2,y}) \Big|_{x=x+1/2} dy \, dt - \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} (gh_2 k_{1,y}) \Big|_{x=x-1/2} dy \, dt, \\ &\int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} f \tilde{H} \tilde{U} \, dx \, dy \, dt = \\ &= \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} (gh_2 k_{x,2}) \Big|_{y=y+1/2} dx \, dt - \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} (gh_2 k_{x,1}) \Big|_{y=y-1/2} dx \, dt, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &\int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \tilde{H} \Big|_{t=\tau} dx \, dy - \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \tilde{H} \Big|_{t=0} dx \, dy + \\ &+ \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} \tilde{H} \tilde{U} \Big|_{x=x+1/2} dy \, dt - \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} \tilde{H} \tilde{U} \Big|_{x=x-1/2} dy \, dt + \\ &+ \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} \tilde{H} \tilde{V} \Big|_{y=y+1/2} dx \, dt - \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} \tilde{H} \tilde{V} \Big|_{y=y-1/2} dx \, dt = 0, \\ &\int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \tilde{H} \tilde{U} \Big|_{t=\tau} dx \, dy - \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \tilde{H} \tilde{U} \Big|_{t=0} dx \, dy + \\ &+ \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} \left( h_2 \tilde{U}^2 + \frac{1}{2} g (h_2 + k_{2,y})^2 \right) \Big|_{x=x+1/2} dy \, dt - \\ &- \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} \left( h_2 \tilde{U}^2 + \frac{1}{2} g (h_2 + k_{1,y})^2 \right) \Big|_{x=x-1/2} dy \, dt + \\ &+ \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} h_2 \tilde{U} \tilde{V} \Big|_{y=y+1/2} dx \, dt - \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} \tilde{H} \tilde{U} \tilde{V} \Big|_{y=y-1/2} dx \, dt = 0, \\ &\int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \tilde{H} \tilde{V} \Big|_{t=\tau} dx \, dy - \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \tilde{H} \tilde{V} \Big|_{t=0} dx \, dy + \\ &+ \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} \left( h_2 \tilde{V}^2 + \frac{1}{2} g (h_2 + k_{x,2})^2 \right) \Big|_{y=y+1/2} dx \, dt - \\ &- \int_{x-1/2}^{x+1/2} \int_t^{t+\tau} \left( h_2 \tilde{V}^2 + \frac{1}{2} g (h_2 + k_{x,1})^2 \right) \Big|_{y=y-1/2} dx \, dt + \\ &+ \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} h_2 \tilde{V} \tilde{U} \Big|_{x=x+1/2} dy \, dt - \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_t^{t+\tau} \tilde{H} \tilde{V} \tilde{U} \Big|_{x=x-1/2} dy \, dt = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $x \pm 1/2$ ,  $y \pm 1/2$  — значения координаты границ ячейки с номером  $(x, y)$ .

Применяя в (2.24) теорему о среднем и полагая, что на границе ячейки значения всех гидродинамических параметров являются решениями соответствующей одномерной задачи на протяжении всего временного шага интегрирования, получим разностную схему:

$$\begin{aligned}
 H_{x,y}^{t+1} &= H_{x,y}^t + \tau \left[ \frac{H_{x-1/2,y}^t U_{x-1/2,y}^t - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t}{X} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{H_{x,y-1/2}^t V_{x,y-1/2}^t - H_{x,y+1/2}^t V_{x,y+1/2}^t}{Y} \right], \\
 U_{x,y}^{t+1} &= \tau \left[ \frac{g \left( H_{x-1/2,y}^t + i \frac{(K_{x,y} + K_{x-1,y})}{2} \right)^2}{2} + H_{x-1/2,y}^t (U_{x-1/2,y}^t)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g \left( H_{x+1/2,y}^t + i \frac{(K_{x+1,y} + K_{x,y})}{2} \right)^2}{2} - H_{x+1/2,y}^t (U_{x+1/2,y}^t)^2 \right] + \\
 &\quad \frac{XH_{x,y}^{t+1}}{XH_{x,y}^{t+1}} + \\
 &\quad + \tau \frac{H_{x,y-1/2}^t U_{x,y-1/2}^t V_{x,y-1/2}^t - H_{x,y+1/2}^t U_{x,y+1/2}^t V_{x,y+1/2}^t}{YH_{x,y}^{t+1}} + \frac{H_{x,y}^t U_{x,y}^t}{H_{x,y}^{t+1}}, \\
 V_{x,y}^{t+1} &= \tau \left[ \frac{g \left( H_{x,y-1/2}^t + i \frac{(K_{x,y} + K_{x,y-1})}{2} \right)^2}{2} + H_{x,y-1/2}^t (U_{x,y-1/2}^t)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g \left( H_{x,y+1/2}^t + i \frac{(K_{x,y+1} + K_{x,y})}{2} \right)^2}{2} - H_{x,y+1/2}^t (U_{x,y+1/2}^t)^2 \right] + \\
 &\quad \frac{YH_{x,y}^{t+1}}{YH_{x,y}^{t+1}} + \\
 &\quad + \tau \frac{H_{x-1/2,y}^t U_{x-1/2,y}^t V_{x-1/2,y}^t - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t V_{x+1/2,y}^t}{XH_{x,y}^{t+1}} + \frac{H_{x,y}^t V_{x,y}^t}{H_{x,y}^{t+1}},
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

где  $\tau$  — шаг по времени;  $X$  и  $Y$  — шаги по пространству;  $H$  — глубина жидкости;  $U$  — скорость в направлении  $x$ ;  $V$  — скорость в направлении  $y$ ; нижние индексы  $x, y$  — значения функции, отнесенные к

центру масс ячейки с номером  $(x, y)$ ; полуцелые индексы  $x \pm 1/2$ ,  $y \pm 1/2$  — значения величин на границе между ячейками с номерами  $x, x \pm 1$  и  $y, y \pm 1$  соответственно; верхний индекс  $t$  — номер шага по времени;  $f$  — параметр Кориолиса;  $K_{x,y}$  — высота фиктивной границы, соответственно, согласно формуле (2.20):

$$\begin{aligned}
 \frac{K_{x+1,y} + K_{x,y}}{2} &= \frac{\left| \frac{fv_{x+1,y}X}{g} + \frac{fv_{x,y}X}{g} \right|}{2}, \\
 \frac{K_{x,y} + K_{x-1,y}}{2} &= \frac{\left| \frac{fv_{x,y}X}{g} + \frac{fv_{x-1,y}X}{g} \right|}{2}, \\
 \frac{K_{x,y+1} + K_{x,y}}{2} &= \frac{\left| \frac{fv_{x,y+1}X}{g} + \frac{fv_{x,y}X}{g} \right|}{2}, \\
 \frac{K_{x,y} + K_{x,y-1}}{2} &= \frac{\left| \frac{fv_{x,y}X}{g} + \frac{fv_{x,y-1}X}{g} \right|}{2}.
 \end{aligned}$$

Переменная  $i$  принимает значение, либо 0 в случае отрицательного перепада соответствующих высот  $(K_{x+1,y} + K_{x,y})/2$ ,  $(K_{x,y+1} + K_{x,y})/2$ ,  $(K_{x,y} + K_{x-1,y})/2$ ,  $(K_{x,y} + K_{x,y-1})/2$  фиктивной границы, либо  $0 \leq i \leq 1$  в случае положительного перепада. Переменная  $i$  принимает значение, равное 1, в случае, если  $H^*$ , определяемое соотношениями (1.65), (1.66) для соответствующей грани ячейки  $(x, y)$ , не превышает значения глубины внутри нее. В противном случае значение  $i$  на соответствующей грани является отношением глубины формирующейся при полном торможении потока  $(H_{x,y}^t U_{x,y}^t, V_{x,y}^t)$  на указанной грани к соответствующему фиктивному перепаду высот. Значения  $H_{x \pm 1/2, y \pm 1/2}^t$ ,  $U_{x \pm 1/2, y \pm 1/2}^t$ ,  $V_{x \pm 1/2, y \pm 1/2}^t$  на гранях вычисляются путем решения соответствующих задач Римана.

Вид изучаемых уравнений гиперболический, поэтому в качестве условия устойчивости, по аналогии с уравнениями мелкой воды без учета силы Кориолиса (Куликовский и др., 2001), в данном методе

используется стандартное условие Куранта – Фридрихса, в котором, однако, должна учитываться скорость распространения возмущений, в том числе и в фиктивном нижнем слое, т. е. шаг по времени не может превышать минимальное по всем ячейкам время, за которое возмущения в каждом слое проходят половину ячейки, с учетом коррекции на двумерную постановку:

$$\tau = R \frac{\Delta t_x \Delta t_y}{\Delta t_x + \Delta t_y}, \quad (2.26)$$

где  $\Delta t_x, \Delta t_y$  — минимальные времена распространения возмущений по осям абсцисс и ординат, соответственно;  $R < 1$  — дополнительный коэффициент для увеличения надежности, в нижеприведенных расчетах принимаемый равным 0,4. Успешность выбора критерия устойчивости в таком виде подтверждают тестовые расчеты.

Для сравнения предложенного алгоритма рассмотрим разностные схемы, используемые в известных методах расчета течений мелкой воды с учетом влияния силы Кориолиса. Для упрощения изложения все выкладки приведены в случае одномерной разностной схемы для ячейки, слева примыкающей к фиктивной ступеньке высоты  $a$ . Запишем разностную схему для wave-propagation-метода (LeVeque, 1998a, b) в явном виде. Метод основан на решении дополнительной задачи Римана в центре каждой ячейки, внутри которой разность потоков подбирается таким образом, чтобы в точности уравновесить влияние силы Кориолиса в стационарном случае. Таким образом, на шаге предиктора рассчитываются параметры потока  $h_{x-}, u_{x-}$  и  $h_{x+}, u_{x+}$  внутри ячейки, а затем, на шаге корректора, с использованием параметров потока, полученных на шаге предиктора, вычисляются параметры потока на гранях ячейки  $h_{i-1/2}, u_{i-1/2}$  и  $h_{x+1/2}, u_{x+1/2}$  (рис. 2.16, 2.17). Фактически такой подход соответствует горизонтальному перераспределению импульса и массы внутри рассматриваемой ячейки для компенсации влияния ступеньки. Наличие такого подсеточного разрыва обеспечивает описание недивергентной правой части системы уравнений (2.18), благодаря дополнительному источнику импульса. В результате рассматривается стандартная система уравнений мелкой воды над ровной поверхностью с модифицированными потоками через грани ячеек.

Для получения разностной схемы, интегрируем по каждой из частей ячейки, полученных при фиктивном разбиении всей ячейки в центре:

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{G_{left}} h \, dx + hu \, dt + \iint_{G_{right}} h \, dx + hu \, dt = 0, \\ & \iint_{G_{left}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \right] dx \, dt + \\ & + \iint_{G_{right}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \right] dx \, dt = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.27)$$

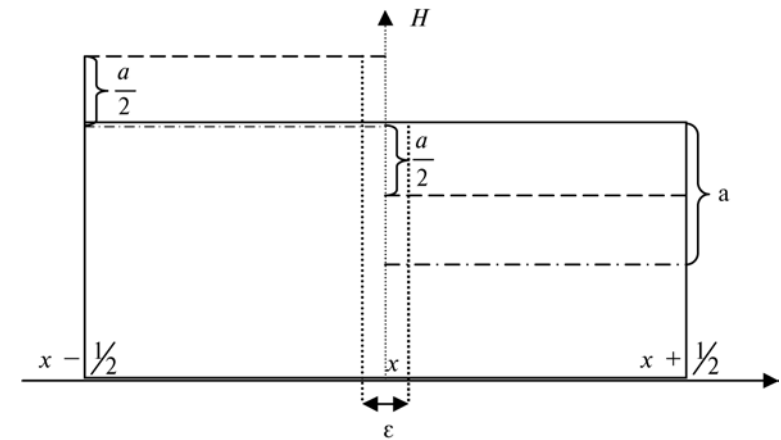


Рис. 2.16. Схема корректировки параметров потока в wave-propagation-методе (пунктирная линия) и well-balancing-методе (штрихпунктирная линия)

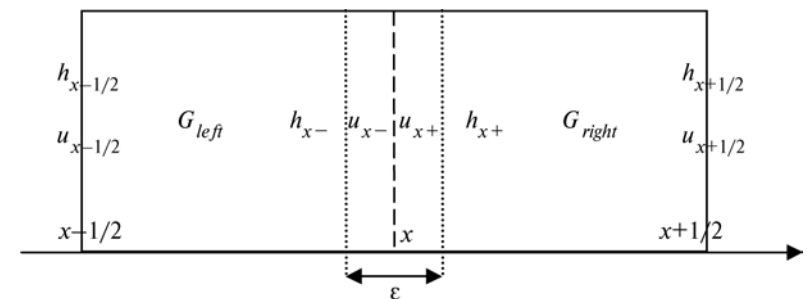


Рис. 2.17. Разделение ячейки на две половины в wave-propagation-методе

Применение формулы Остроградского–Гаусса преобразует (2.27) к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{x-1/2}^x h|_{t=t+1} dx + \int_x^{x+1/2} h|_{t=t+1} dx - \int_{x-1/2}^x h|_{t=t} dx - \int_x^{x+1/2} h|_{t=t} dx + \\ & + \int_t^{t+1} (hu)|_{x+1/2} dt - \int_t^{t+1} (hu)|_{x-1/2} dt + \int_t^{t+1} (hu)|_{x+} dt - \int_t^{t+1} (hu)|_{x-} dt = 0, \\ & \int_{x-1/2}^x (hu)|_{t=t+1} dx + \int_x^{x+1/2} (hu)|_{t=t+1} dx - \int_{x-1/2}^x (hu)|_{t=t} dx - \int_x^{x+1/2} (hu)|_{t=t} dx + \\ & + \int_t^{t+1} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \Big|_{x+1/2} dt - \int_t^{t+1} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \Big|_{x-1/2} dt + \\ & + \int_t^{t+1} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \Big|_{x-} dt - \int_t^{t+1} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \Big|_{x+} dt = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.28)$$

Использование теоремы о среднем и осуществление интегрирования позволяет переписать систему (2.28) в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & H_x^{t+1} \frac{1}{2} \Delta x + H_x^{t+1} \frac{1}{2} \Delta x - H_x^t \frac{1}{2} \Delta x - H_x^t \frac{1}{2} \Delta x + H_{x+1/2} U_{x+1/2} \tau - \\ & - H_{x-1/2} U_{x-1/2} \tau = 0, \\ & H_x^{t+1} U_x^{t+1} \frac{1}{2} \Delta x + H_x^{t+1} U_x^{t+1} \frac{1}{2} \Delta x - H_x^t U_x^t \frac{1}{2} \Delta x - H_x^t U_x^t \frac{1}{2} \Delta x + \\ & + \left( H_{x+1/2} U_{x+1/2}^2 + \frac{1}{2} g H_{x+1/2}^2 \right) \tau - \left( H_{x-1/2} U_{x-1/2}^2 + \frac{1}{2} g H_{x-1/2}^2 \right) \tau + \\ & + \left( \left( H_x + \frac{a}{2} \right) U_{x+}^2 + \frac{1}{2} g \left( H_x + \frac{a}{2} \right)^2 \right) \tau - \left( \left( H_x - \frac{a}{2} \right) U_{x-}^2 + \frac{1}{2} g \left( H_x - \frac{a}{2} \right)^2 \right) \tau = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.29)$$

Учитывая, что в центре ячейки решается стационарная задача, для которой  $H_{x+}^t = H_x^t + \frac{1}{2}a$ ,  $H_{x-}^t = H_x^t - \frac{1}{2}a$ , и в малой области  $\varepsilon$ :  $U_{x+} = U_{x-} = 0$ , система (2.29) преобразуется в следующую разностную схему:

$$\left\{ \begin{aligned} & H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X} \right), \\ & U_x^{t+1} = \tau \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^2 + \frac{1}{2} g H_{x-1/2}^2 -}{X H_x^{t+1}} \right. \\ & \left. - \frac{H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^2 - \frac{1}{2} g H_{x+1/2}^2 - g H_x^t a}{X H_x^{t+1}} \right) + \frac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}}. \end{aligned} \right. \quad (2.30)$$

Второе уравнение полученной разностной схемы формально совпадает со вторым уравнением квазидвухслойной схемы (2.25) при следующем условии:

$$H_x = H_{x+1/2} + \frac{a}{2}, \quad (2.31)$$

где потоковая величина  $H_{x+1/2}$  вычисляется квазидвухслойным методом.

Нужно отметить, что в wave-propagation методе параметры потока на границе ячейки  $H_{x+1/2}, U_{x+1/2}$  вычисляются как решение задачи распада разрыва для начальных параметров слева  $H_x + \frac{a}{2}, U_x$ , и справа  $H_{x+1}, U_{x+1}$  от плоскости разрыва, в то время как в квазидвухслойном методе  $H_{x+1/2}$  вычисляется как решение задачи распада разрыва для начальных параметров слева  $H_x - H^*, U_x$  и справа  $H_{x+1}, U_{x+1}$  от плоскости разрыва.

Разностная схема, предложенная в работах (Bouchut et al., 2004; Audusse et al., 2004; Reznik et al., 2001), также интерпретирует член, содержащий параметр Кориолиса, как некую фиктивную границу. В основе метода (Bouchut et al., 2004; Audusse et al., 2004; Reznik et al., 2001) лежит схема гидростатической реконструкции подсчета потоков на гранях ячеек, использующая решения стационарных состояний. В одномерном случае разностная схема получается из классической схемы для ровной подстилающей поверхности добавлением в схему источниковых членов  $\frac{1}{2} g H_{x+1/2-}^2, \frac{1}{2} g H_{x-1/2+}^2$  и использованием на гранях, подкорректированных с учетом гидростатического баланса, параметров потока. Схема выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X} \right), \\ U_x^{t+1} = \tau \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^2 + \frac{1}{2} g H_{x-1/2}^2 - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^2 - \frac{1}{2} g H_{x+1/2}^2 + \frac{1}{2} g H_{x+1/2}^2 - \frac{1}{2} g H_{x-1/2}^2}{X H_x^{t+1}} \right) + \frac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Используя условие гидростатического баланса (Bouchut et al., 2004), получим, что в случае ступеньки высоты  $a$ , справа от рассматриваемой ячейки,  $H_{x+1/2-} = H_x - a$ ,  $H_{x-1/2+} = H_x$ . Тогда разностная схема переписывается в виде:

$$\begin{cases} H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X} \right), \\ U_x^{t+1} = \tau \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^2 + \frac{1}{2} g H_{x-1/2}^2 - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^2 - \frac{1}{2} g H_{x+1/2}^2 + \frac{1}{2} g a^2 - g H_x a}{X H_x^{t+1}} \right) + \frac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Второе уравнение разностной схемы (2.33), также как и схемы (2.30), формально совпадает со вторым уравнением разностной схемы (2.25) при условии:

$$H_x = H_{x+1/2} + a, \quad (2.34)$$

где потоковая величина  $H_{x+1/2}$  вычисляется квазидвухслойным методом.

Отметим, что в методе, предложенном в работе (Bouchut et al., 2004),  $H_{x+1/2}, U_{x+1/2}$  вычисляется как решение задачи распада разрыва для начальных параметров слева  $H_x - a, U_x$  и справа  $H_{x+1}, U_{x+1}$  от плоскости разрыва, в то время как в квазидвухслойном методе  $H_{x+1/2}$  вычисляется как решение задачи распада разрыва для начальных параметров слева  $H_x - H^*, U_x$  и справа  $H_{x+1}, U_{x+1}$  от плоскости разрыва.

Вообще говоря, разностная схема, представленная в работах (Bouchut et al., 2004; Audusse et al., 2004; Reznik et al., 2001), может быть получена тем же методом, что и схема Левека (LeVeque, 1998a, b). Действительно, достаточно рассмотреть в методе Левека на шаге предиктор в качестве стационарной гидростатической задачи задачу с дополнительным источником, соответствующим принципу баланса покая (рис. 16, wave-propagation метод (LeVeque, 1998a, b) — пунктирная линия и well-balancing метод (Bouchut et al., 2004; Audusse et al., 2004; Reznik et al., 2001) — штрихпунктирная линия). Важно подчеркнуть, что в работах (Куликовский и др., 2001; Беликов, Семенов, 1997), посвященных численному моделированию классической системы Сен-Венана, аналогичный подход перераспределения массы внутри ячейки дал вполне удовлетворительный результат, при этом, в отличие от ситуации с недифференцируемой неоднородностью правой части, в указанном методе не требовалось введения дополнительных распадов разрыва внутри ячейки, поскольку после интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений полученные балансовые уравнения содержали необходимый член, описывающий работу наклона подстилающей поверхности в явном виде.

Принимая во внимание, что конечно-разностные представления для закона сохранения импульса с учетом (2.31) и (2.34) формально совпадают, с точностью до способа нахождения потоковых величин на гранях ячейки, оба метода можно считать частными случаями квазидвухслойной модели, в которой  $H_{x+1/2}$  вычисляется, с использованием для рассматриваемой задачи, глубины потока  $H_x - H^*$  слева от разрыва и  $H_{x+1} - H^*$  справа, где  $H^*$  в зависимости от текущих гидродинамических значений может принимать, сообразно физической ситуации, весь спектр значений:  $[0, a]$  — при натекании потока на фиктивную границу и  $[a, H_x]$  — в противоположном случае. В рассмотренных же моделях коррекция потоковых величин на гранях вычисляемой ячейки не зависит от значений гидродинамических величин в соседних ячейках.

### 2.6. Результаты численного моделирования вращающейся мелкой воды

В данном разделе представлены и проанализированы расчеты течений мелкой воды в различных физических задачах. Про моделировано явление геострофической адаптации. Хорошо известно, что

возмущения синоптического масштаба в атмосфере и океане приблизительно удовлетворяют условиям геострофического баланса и всякое его локальное нарушение приводит к излучению акустико-гравитационных волн, в результате чего равновесие восстанавливается за счет приспособления поля давления к измененному полю скорости. В частности, перенос масс в атмосфере происходит, на первый взгляд, вопреки здравому смыслу, — не поперек, а вдоль изобар. Именно по этой причине воздушные массы в окрестности центра пониженного (повышенного) давления вращаются вокруг этого центра по сходящимся к нему (расходящимся от него) спиральям, образуя крупномасштабный вихрь — циклон (антициклон). Геострофическая адаптация, таким образом, разделяет любое движение на быструю (акустико-гравитационные волны) и медленную (уравновешенную) части. Причем вид этих частей однозначно определяется из начального возмущенного состояния. На текущий момент для расчета явления геострофической адаптации успешно применяется модель вращающейся мелкой воды. Приведем результаты расчетов в сравнении с результатами работы (Bouchut et al., 2004).

Для численного моделирования применялся квазидвухслойный метод второго порядка точности по пространству и времени. Повышение пространственного порядка точности достигалось благодаря использованию кусочно-линейной реконструкции распределения значения функций внутри ячейки, с использованием ограничителя minmod, впервые предложенного Колганом для решения газодинамических задач методами годовского типа:

$$W_x^t = \min \operatorname{mod} \left( \frac{F_{x+1}^t - F_x^t}{\Delta x}, \frac{F_x^t - F_{x-1}^t}{\Delta x} \right), \quad (2.35)$$

$$\min \operatorname{mod}(a, b) = \alpha \frac{1}{2} (\operatorname{sign} a + \operatorname{sign} b) \min(|a|, |b|),$$

где  $F_x^t \equiv \begin{pmatrix} H_x^t \\ U_x^t \\ V_x^t \end{pmatrix}; \alpha = 0,72.$

Второй порядок точности по времени достигался применением двухшагового алгоритма «предиктор — корректор». На стадии «предиктор» находились вспомогательные значения искомым величин для целого шага по времени с помощью квазидвухслойного алгоритма

первого порядка точности, используемые для получения значений на промежуточном шаге по времени арифметическим осреднением со значениями предыдущего временного шага. На шаге «корректор» данные величины реконструировались по пространству:

$$F_x^{t+\tau/2} + \frac{1}{2} \Delta x W_x^t, F_{x+1}^{t+\tau/2} - \frac{1}{2} \Delta x W_{x+1}^t, \text{ соответственно слева и справа от}$$

границы  $x + 1/2$ , и находились значения потоковых величин на границе ячеек, соответствующие промежуточному временному слою. Использовалась прямоугольная сетка размером  $200 \times 10$  ячеек.

В качестве тестовой была промоделирована классическая задача Россби. Рассматривалось начальное возмущение:

$$\begin{cases} h(x, 0) = h_0, \\ u(x, 0) = 0, \\ v(x, 0) = V v_{jet}(x), \end{cases} \quad (2.36)$$

где  $h_0$  — начальная глубина покоя;  $V$  — характерный масштаб скорости;  $v_{jet}(x)$  — нормализованный профиль, задаваемый следующим образом:

$$v_{jet}(x) = \frac{\left( 1 + \tanh\left(\frac{4x}{L} + 2\right) \right) \left( 1 - \tanh\left(\frac{4x}{L} - 2\right) \right)}{(1 + \tanh(2))^2}. \quad (2.37)$$

Форма профиля представлена на рис. 2.18, где  $L$  — характерный масштаб возмущения. Характерные параметры  $g, h_0, f$  были зафиксированы. Характерный масштаб скорости  $V$  и характерный масштаб возмущения  $L$ , вычислялись из двух безразмерных параметров числа Россби — Кибеля  $Ro$  и числа Бюргерса  $Bu$ :

$$\begin{aligned} Ro &= \frac{V}{fL}, \\ Bu &= \frac{R_d^2}{L^2}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $R_d$  — радиус деформации,

$$R_d = \frac{\sqrt{gh_0}}{f}.$$

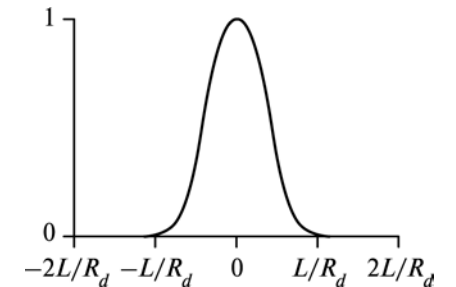


Рис. 2.18. Нормализованный профиль  $v_{jet}(x)$

Характерный масштаб времени задается следующей формулой:  $T_f = \frac{2\pi}{f}$ . Ниже представлены результаты эволюции глубины  $h_0$ , в случае  $Ro = 1$ ,  $Bu = 0,25$ . На рис. 2.19 показана эволюция, прослеживаемая с помощью квазидвухслойной модели, хорошо соответствующая результатам, представленным в работе (Bouchut et al., 2004).

Наблюдается совпадение характерных пиков разбегающихся акустико-гравитационных волн и центральной уравновешенной части. Это свидетельствует об эффективности использования квазидвухслойной модели при описании крупномасштабных геофизических явлений.

На рис. 2.20 показано сравнение величин потенциальной завихренности в начальный ( $t = 0,2T_f$ ) и конечный ( $t = 16T_f$ ) моменты времени для классической задачи Россби (2.36) и  $Ro = 1$ ,  $Bu = 0,5$ . Потенциальная завихренность задается следующей формулой:

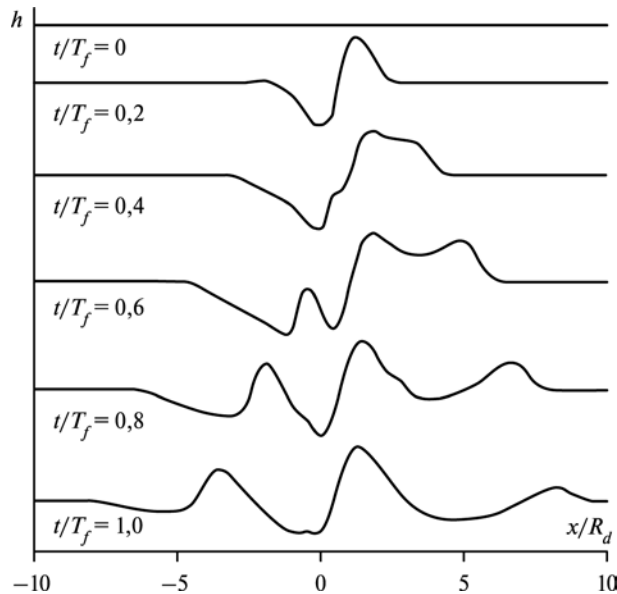


Рис. 2.19. Эволюция распространения акустико-гравитационных волн, в результате воздействия начального возмущения  $V_{jet}(x)$  при использовании квазидвухслойного метода

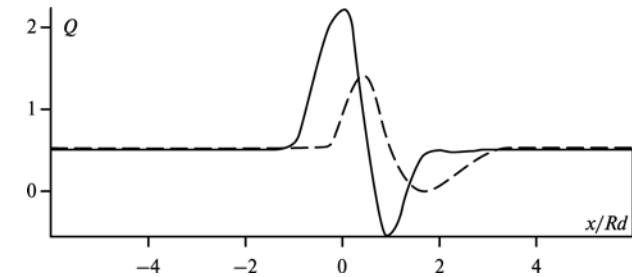


Рис. 2.20. Потенциальная завихренность в начальный (сплошная линия,  $t = 0,2T_f$ ) и конечный (штриховая линия,  $t = 16T_f$ ) моменты времени

$$Q = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + f}{h}. \quad (2.39)$$

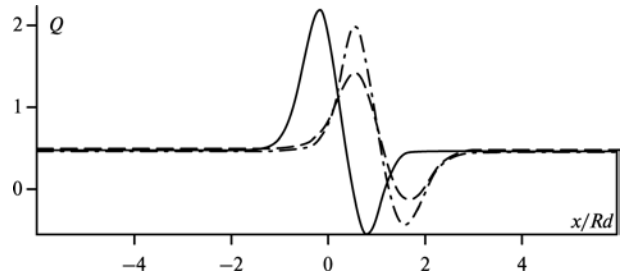
Наблюдается сохранение инварианта  $Q$  — потенциального вихря, в течение времени. Отметим, что реальное время процесса приблизительно равно 12 сут.

Из представленного графика видно, что максимум функции сдвигается в антициклонную область, а минимум потенциальной завихренности со временем увеличивается. Данные результаты, определяются чисто нелинейными эффектами и хорошо согласуются с результатами, полученными в работе (Le Sommer et al., 2003).

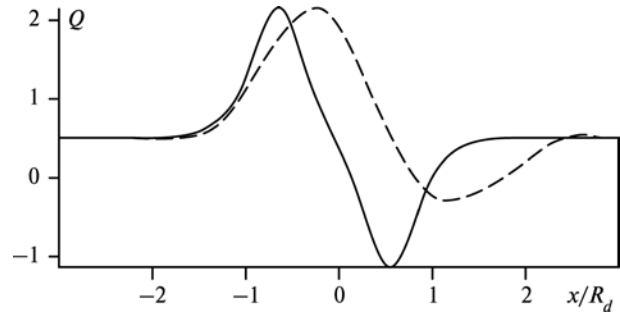
С другой стороны, с использованием указанного в разд. 2.4 алгоритма пересчета трансверсальной составляющей скорости график потенциальной зависимости для классической задачи геострофической адаптации, известной как задача Россби, без применения заостряющей реконструкции выглядит следующим образом (рис. 2.21, штрихпунктирная линия). Для сравнения красным цветом показано значение потенциальной зависимости в случае, когда трансверсальная составляющая вектора скорости конвективно переносится тангенциальной.

Наблюдается значительное улучшение сохранения потенциальной завихренности. Незначительное понижение амплитуды связано, как было указано выше, с системной вязкостью.

В случае применения заостряющей реконструкции, описываемой формулой (2.35), максимум потенциальной завихренности сохраняется (рис. 2.22).



**Рис. 2.21.** Потенциальная завихрённость в начальный (сплошная линия,  $t = 0,2T_p$ ), конечный при конвективном переносе (штриховая линия,  $t = 16T_p$ ) и конечный при пересчете трансверсальной скорости (штрихпунктирная линия,  $t = 5T_p$ ) моменты времени



**Рис. 2.22.** Потенциальная завихрённость в начальный (сплошная линия,  $t = 0,2T_p$ ) и конечный (штриховая линия,  $t = 16T_p$ ) моменты времени при применении заостряющей реконструкции (2.35)

### 2.7. Метод Годунова для уравнений вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью произвольного профиля в рамках квазидвухслойного приближения

В данном разделе предложена конечно-разностная схема для уравнений вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью произвольного профиля. Система уравнений вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью произвольного профиля  $z = b(x, y)$ , с учётом замены членов (2.17), отвечающих за влияние силы Кориолиса, записывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh\frac{db}{dx} - gh\frac{dk}{dx}, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh\frac{db}{dy} - gh\frac{dk}{dy}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Влияние членов  $-gh\frac{dk}{dx}$  и  $-gh\frac{dk}{dy}$  в сравнении с членами, отвечающими за подстилающую поверхность  $-gh\frac{db}{dx}$  и  $-gh\frac{db}{dy}$ , на каждом временном шаге на порядок меньше, поэтому для получения адекватной картины течения необходимо поддерживать вычислительную точность, соответствующую именно минимальным эффектам, определяемым силой Кориолиса.

Для построения расчетной сетки эффективная граница аппроксимируется кусочно-постоянной функцией. Граница представляется совокупностью горизонтальных и вертикальных участков плоскостей так, что каждая ячейка принадлежит участку эффективной границы с ровным горизонтальным дном. Очевидно, что при таком построении сетки каждая ячейка обладает собственной высотой дна, вообще говоря, различной для каждой ячейки и в каждый момент времени. Данный способ построения сетки может легко автоматизироваться, при условии, что выдерживаются ограничения на максимальный перепад высот, допустимый для каждой ячейки, не принадлежащей области скачкообразных изменений профиля эффективной границы. В некоторых задачах полезно затем регуляризовать сетку, измельчая до размеров минимальной полученной ячейки или до характерных размеров поставленной задачи. После этого начальные условия задачи представляются сеточной функцией, которая ставит в соответствие каждой ячейке с номером  $(x, y)$  четыре осредненные по ее площади величины:  $H_{x,y}$  — глубину жидкости;  $(V_{x,y}, U_{x,y})$  — вектор скорости жидкости;  $B_{x,y}$  — высоту подстилающей поверхности и  $K_{x,y}$  — высоту фиктивной границы. Применяя интегральные законы сохранения к каждой ячейке и полагая, что на границе ячейки значения всех гидродинамических параметров остаются неизменными на протяжении временного шага интегрирования, получим разностную схему:



$$\begin{aligned}
 H_{x,y}^{t+1} &= H_{x,y}^t + \tau \left[ \frac{H_{x-1/2,y}^t U_{x-1/2,y}^t - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t}{X} + \frac{H_{x,y-1/2}^t V_{x,y-1/2}^t - H_{x,y+1/2}^t V_{x,y+1/2}^t}{Y} \right], \\
 U_{x,y}^{t+1} &= \tau \left[ \frac{g \left( H_{x-1/2,y}^t + i \left( B_{x,y} - B_{x-1,y} \right) + \frac{(K_{x,y} + K_{x-1,y})}{2} \right)^2}{2} + \frac{g \left( H_{x+1/2,y}^t + i \left( B_{x+1,y} - B_{x,y} \right) + \frac{(K_{x+1,y} + K_{x,y})}{2} \right)^2}{2} - H_{x-1/2,y}^t (U_{x-1/2,y}^t)^2 - H_{x+1/2,y}^t (U_{x+1/2,y}^t)^2 \right] + \frac{XH_{x,y}^{t+1}}{XH_{x,y}^{t+1}}, \\
 &+ \tau \frac{(H_{x,y-1/2}^t U_{x,y-1/2}^t V_{x,y-1/2}^t - H_{x,y+1/2}^t U_{x,y+1/2}^t V_{x,y+1/2}^t)}{YH_{x,y}^{t+1}} + \frac{H_{x,y}^t U_{x,y}^t}{H_{x,y}^{t+1}}, \\
 V_{x,y}^{t+1} &= \tau \left[ \frac{g \left( H_{x,y-1/2}^t + i \left( B_{x,y} - B_{x,y-1} \right) + \frac{(K_{x,y} + K_{x,y-1})}{2} \right)^2}{2} + \frac{g \left( H_{x,y+1/2}^t + i \left( B_{x,y+1} - B_{x,y} \right) + \frac{(K_{x,y+1} + K_{x,y})}{2} \right)^2}{2} - H_{x,y-1/2}^t (U_{x,y-1/2}^t)^2 - H_{x,y+1/2}^t (U_{x,y+1/2}^t)^2 \right] + \frac{YH_{x,y}^{t+1}}{YH_{x,y}^{t+1}}, \\
 &+ \tau \frac{(H_{x-1/2,y}^t U_{x-1/2,y}^t V_{x-1/2,y}^t - H_{x+1/2,y}^t U_{x+1/2,y}^t V_{x+1/2,y}^t)}{XH_{x,y}^{t+1}} + \frac{H_{x,y}^t V_{x,y}^t}{H_{x,y}^{t+1}}.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

где  $\tau$  — шаг по времени;  $X$  и  $Y$  — шаги по пространству;  $H$  — глубина жидкости;  $U$  — скорость в направлении  $x$ ;  $V$  — скорость в направлении  $y$ ; нижние индексы  $x, y$  — значения функции, отнесенные к центру масс ячейки с номером  $(x, y)$ ; полуцелые индексы  $x \pm 1/2, y \pm 1/2$  — значения величин на границе между ячейками с номерами  $x, x \pm 1$  и  $y, y \pm 1$  соответственно. Верхний индекс  $t$  обозначает номер шага по времени,  $f$  — параметр Кориолиса.

Следует обратить внимание, что применение кусочно-постоянной сетки, очевидно, привело к исчезновению из разностной схемы (2.41) слагаемых, отвечающих за изменение геометрии как подстилающей поверхности, так и фиктивной границы. Каждая заданная грань ячейки расчетной области состоит в общем случае из двух частей: из части, аппроксимирующей эффективную границу, и оставшейся части, через которую осуществляется свободное течение жидкости. Формально, с точки зрения приближения мелкой воды, первая часть отсутствует, хотя для исходных уравнений Эйлера она, фактически является подстилающей поверхностью — границей, на которой выполнено условие непротекания. При выводе уравнений мелкой воды граничное условие на ней учитывается в самом уравнении, что, очевидно, не изменяет природу ее взаимодействия с потоком жидкости. Поэтому члены, отвечающие в разностной схеме за работу, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} g \left( H_{x-1/2,y}^t + i \left( B_{x,y} - B_{x-1,y} \right) + \frac{(K_{x,y} + K_{x-1,y})}{2} \right)^2, \\
 &\frac{1}{2} g \left( H_{x+1/2,y}^t + i \left( B_{x+1,y} - B_{x,y} \right) + \frac{(K_{x+1,y} + K_{x,y})}{2} \right)^2, \\
 &\frac{1}{2} g \left( H_{x,y-1/2}^t + i \left( B_{x,y} - B_{x,y-1} \right) + \frac{(K_{x,y} + K_{x,y-1})}{2} \right)^2, \\
 &\frac{1}{2} g \left( H_{x,y+1/2}^t + i \left( B_{x,y+1} - B_{x,y} \right) + \frac{(K_{x,y+1} + K_{x,y})}{2} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

где слагаемые

$$i \left[ \left( B_{x,y} - B_{x-1,y} \right) + \left( K_{x,y} + K_{x-1,y} \right) / 2 \right],$$

$$i \left( (B_{x+1,y} - B_{x,y}) + (K_{x+1,y} + K_{x,y}) / 2 \right),$$

$$i \left( (B_{x,y} - B_{x,y-1}) + (K_{x,y} + K_{x,y-1}) / 2 \right),$$

$$i \left( (B_{x,y+1} - B_{x,y}) + (K_{x,y+1} + K_{x,y}) / 2 \right)$$

описывают работу перепада высот эффективной поверхности над потоком жидкости. Здесь  $i$  принимает значение либо 0 в случае отрицательного перепада высот эффективной поверхности, либо  $0 \leq i \leq 1$  в случае положительного перепада. Переменная  $i$  принимает значение, равное 1, в случае если  $H^*$ , определяемое соотношениями (1.65), (1.66) для соответствующей грани ячейки  $(x, y)$ , не превышает значения глубины внутри нее. В противном случае значение  $i$  на соответствующей грани является отношением глубины, формирующейся при полном торможении потока  $(H_{x,y}^t, U_{x,y}^t, V_{x,y}^t)$  на указанной грани, к соответствующему перепаду высот эффективной поверхности. Значения  $H_{x\pm 1/2, y\pm 1/2}^t, U_{x\pm 1/2, y\pm 1/2}^t, V_{x\pm 1/2, y\pm 1/2}^t$  на гранях вычисляются путем решения соответствующих задач Римана.

Если перепад эффективных высот отсутствует, глубины  $H_{x\pm 1/2, y}^t, H_{x, y\pm 1/2}^t$  и скорости  $U_{x\pm 1/2, y}^t, V_{x, y\pm 1/2}^t$  жидкости вычисляются решением обычной задачи Римана на ровной плоскости и соответственно

$$i \left( (B_{x,y} - B_{x-1,y}) + (K_{x,y} + K_{x-1,y}) / 2 \right),$$

$$i \left( (B_{x+1,y} - B_{x,y}) + (K_{x+1,y} + K_{x,y}) / 2 \right),$$

$$i \left( (B_{x,y} - B_{x,y-1}) + (K_{x,y} + K_{x,y-1}) / 2 \right),$$

$$i \left( (B_{x,y+1} - B_{x,y}) + (K_{x,y+1} + K_{x,y}) / 2 \right)$$

принимают нулевые значения, и выражения (2.29), а вместе с ними и вся разностная схема (2.41) тождественно переходит в стандартную разностную схему Годунова для классических уравнений мелкой воды над ровным дном.

Для демонстрации работоспособности численного метода выполнено моделирование течения мелкой воды в присутствии силы Кориолиса над подстилающей поверхностью в виде горы. Характерные параметры задачи: линейные размеры  $10^6 \times 10^6$  м, высота горы  $1,2 \cdot 10^3$  м,

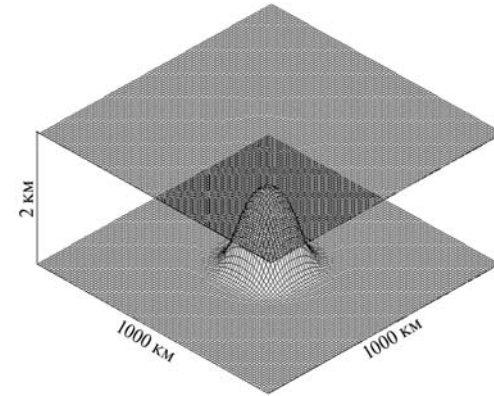


Рис. 2.23. Начальные условия тестовой задачи

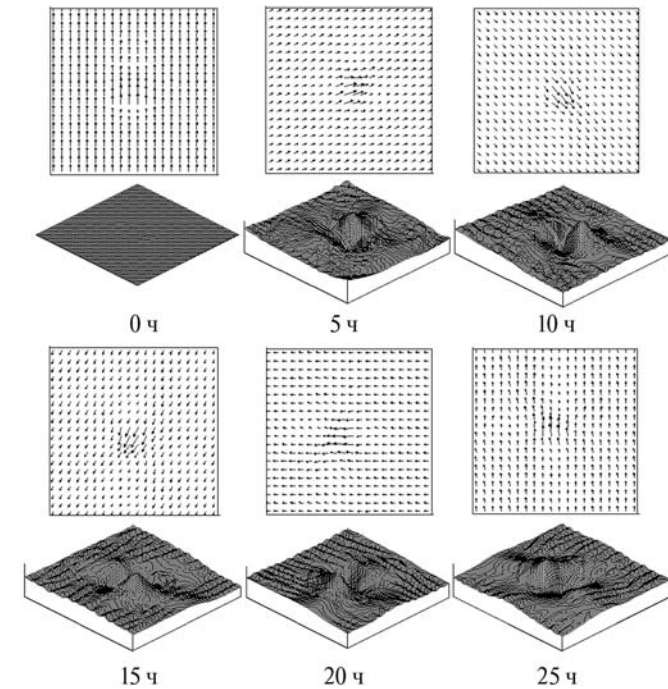


Рис. 2.24. Эволюция течения жидкости/газа под влиянием силы Кориолиса над горой; верхние графики — поля скоростей, нижние — свободная поверхность

глубина жидкости  $2 \cdot 10^3$  м, параметр Кориолиса  $0,00001452 \text{ с}^{-1}$ . Начальные параметры ветра:  $u = 0 \text{ м/с}$ ,  $v = 20 \text{ м/с}$ . Граничные условия — протекание. Использовалась прямоугольная сетка размером  $60 \times 60$  ячеек.

В результате было получено характерное время одного оборота системы, в целом равное 24 ч, что соответствует природному феномену (характерное время одного оборота системы в целом для задач геофизической динамики составляет сутки). На рис. 2.23 показана картина течения в начальный момент времени, на рис. 2.24 — эволюция течения за 24 ч.

### 2.8. Исследование течений мелкой воды над произвольным профилем дна в присутствии внешней силы

Численный метод, разработанный для описания силы Кориолиса в течениях вращающейся мелкой воды над неоднородными подстилающими поверхностями, был обобщен на случай произвольной внешней силы. Запишем в дивергентном виде уравнения мелкой воды для течений жидкости или газа с учетом внешней силы над неоднородной поверхностью заданного профиля в двумерном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \frac{db}{dx} + Eh, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh \frac{db}{dy} + Eh, \end{cases} \quad (2.43)$$

где  $h(x, y, t)$  — глубина жидкости;  $u(x, y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости в направлении  $x$ ;  $v(x, y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости в направлении  $y$ ;  $b(x, y)$  — функция, задающая рельеф дна;  $E = E(h, u, v, t)$  — внешняя сила;  $g$  — ускорение свободного падения. Первое уравнение в системе (2.43) является законом сохранения массы, второе и третье — законами сохранения импульса для соответствующих компонент вектора скорости.

Соответствующая одномерная задача, получаемая редукцией системы (2.43) по одной из пространственных координат с точностью

до проекции уравнения импульсов на нередуцированное пространственное направление, соответствует одномерной задаче уравнений мелкой воды над нестационарной комплексной подстилающей поверхностью. Пренебрегая в (2.43) производными для определенности, например, по  $y$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} = -gh \frac{db}{dx} + Eh. \end{cases} \quad (2.44)$$

Здесь  $u = u(x, t)$ ,  $b = b(x, t)$  и  $E = E(x, u, v, t)$ . Если проекция внешней силы  $E_x$  на одну из координатных линий зависит от полного вектора либо от проекции вектора скорости, на другую координатную линию задача становится существенно двумерной. Тогда отказ от производных по одной из пространственных переменных может приводить к нарушению закона сохранения импульса, что, в свою очередь, может потребовать либо введения некоторой фиктивной работы для компенсации указанных нарушений, несмотря на всю нефизичность такой компенсации, либо уточнения трансверсальной составляющей вектора скорости с учетом вертикальной неоднородности течения. Такая ситуация складывается, например, при моделировании вращающейся мелкой воды, когда в качестве внешней силы выступает сила Кориолиса. Использование квазидвухслойной модели позволяет уточнить трансверсальную составляющую вектора скорости в предположении ее стационарности на каждом временном шаге, что, в частности, приводит к улучшению сохранения вектора потенциальной зависимости. Если  $E$  зависит только от  $h$ ,  $u$  и  $t$ , тогда расщепление системы (2.43) на набор подсистем (2.44) физически обоснованно. В противном случае нужно пересчитывать трансверсальную составляющую скорости.

Как и в случае с силой Кориолиса, решение задачи в присутствии внешней силы сводится к решению задачи о течениях мелкой воды над комплексной нестационарной подстилающей поверхностью. Для получения формального совпадения вида уравнений представим правую часть следующим образом:

$$g \frac{dk}{dx} = -E, \quad (2.45)$$

где  $k = k(x, t)$  — фиктивная подстилающая поверхность. Тогда система (2.44) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} = -gh \frac{d(b+k)}{dx}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Как нетрудно видеть, такое представление существенно сужает класс возможных решений, исключая из рассмотрения пространственно неинтегрируемые функции, задающие внешнюю силу  $E$ .

Если ввести разностную сетку с пространственным шагом  $X$  в направлении  $x$ , и рассмотреть две соседние ячейки по  $x$ , то, согласно формуле (2.45), после усреднения будем иметь фиктивную подстилающую поверхность высоты  $E_l X/g$  в левой ячейке и  $E_r X/g$  — в правой. Следовательно, разница средних высот фиктивной поверхности на границе двух соседних ячеек будет определяться выражением

$$\left| \frac{E_r X}{g} + \frac{E_l X}{g} \right| \frac{1}{2}. \quad (2.47)$$

Для проверки работоспособности предложенного метода был решен ряд модельных задач, соответствующих различным видам неоднородностей подстилающей поверхности и нескольким типам внешних сил. В частности, в качестве подстилающих поверхностей использовались горизонтальные и наклонные плоскости и поверхность параболического типа. Для моделирования внешних сил использовались сила Кориолиса и сила гидравлического трения. Результаты численного моделирования сравниваются с имеющимися данными лабораторных экспериментов.

А. ЗАДАЧА О РАСПАДЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СТОЛБА ЖИДКОСТИ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В центре бесконечной плоскости, расположенной под некоторым углом наклона к горизонту  $k$ , находится столб жидкости, имеющий форму параллелепипеда. Таким образом, рассматривается влияние постоянной внешней силы, равной:

$$E = -gk. \quad (2.48)$$

Уравнения Сен-Венана для случая наклонной плоскости имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gkh, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

Результаты численного расчета представлены в разд. 2.3. Была выявлена практически полная аналогия между результатами, полученными с помощью квазидвухслойного метода, и расчетом, использующим замену переменных, что свидетельствует об эффективности применения модели при описании таких физических явлений.

Б. ТЕЧЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НАД ГОРОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Решена задача, содержащая как неоднородную поверхность, так и внешнюю силу — силу Кориолиса. Уравнения мелкой воды в данном случае выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \frac{db}{dx} + fv, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh \frac{db}{dy} - fu, \end{cases} \quad (2.50)$$

где  $f$  — параметр Кориолиса. Согласно (2.43), получаем внешние силы:  $E_x = fv$  и  $E_y = -fu$ . Результаты этого численного расчета представлены в разд. 2.7.

В. ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ДАМБЫ С УЧЕТОМ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРЕНИЯ

Расчетная область представляет собой прямоугольник размерами  $3 \times 2$  м, ограниченный с трех сторон непротекаемыми стенками. На

расстоянии 1 м от левой непротекаемой границы имеется перегородка с симметричным относительно оси абсцисс отверстием шириной 0,40 м. Толщина перегородки пренебрежимо мала и в расчет не принимается. В начальный момент времени отверстие в перегородке закрыто и вся жидкость располагается слева от нее. Через правую границу расчетной области жидкость может свободно протекать. Использована декартова система координат, такая, что перегородка принадлежит оси ординат, а ось абсцисс делит расчетную область на две симметричные половины, и начало координат совпадает с центром отверстия в перегородке. Все условия проведенного численного эксперимента взяты в соответствии с условиями лабораторных и численных экспериментов. В проведенных численных и лабораторных экспериментах угол наклона подстилающей поверхности варьировался от 0 до 10 %. Координаты контрольных точек и схема их расположения приведены на рис. 2.25. Лабораторная установка выполнена из плексигласа и снабжена механизмом для открывания заслонки отверстия в перегородке со скоростью, достаточной для того, чтобы динамика подъема заслонки не отразилась на картине формируемого течения. Подробнее описание лабораторной установки и проведенных экспериментов содержатся в статье (Fraccarollo, Toro, 1995).

Уравнения мелкой воды в данном случае имеют вид:

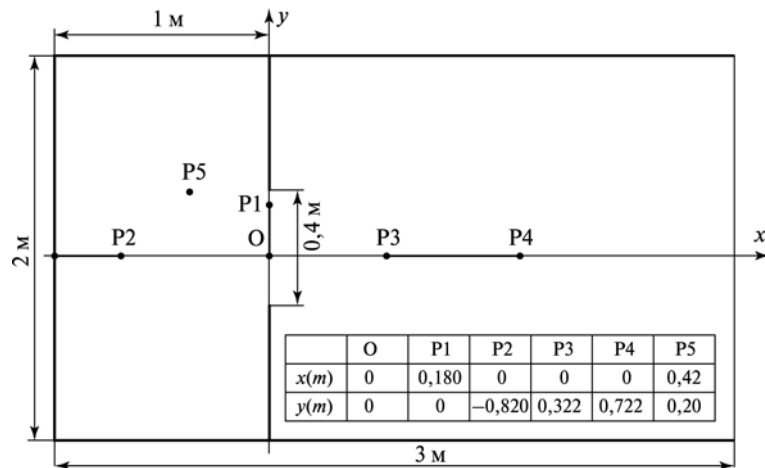


Рис. 2.25. Схема расчетной области и расположения контрольных точек двумерного распада разрыва

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \frac{db}{dx} + \frac{1}{2}\lambda u|u|h, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial hvu}{\partial x} = -gh \frac{db}{dy} + \frac{1}{2}\lambda v|v|h, \end{cases} \quad (2.51)$$

где  $\lambda = 2gn^2h^{-4/3}$ ,  $n = 0,007$ . Для системы (2.51) имеем внешнюю силу:

$$E_x = \frac{1}{2}\lambda u|u|, \quad E_y = h \frac{1}{2}\lambda v|v|.$$

Ниже приведены результаты для случая горизонтальной и наклонной подстилающих поверхностей, угол наклона последней составляет 6,3°. В начальный момент времени глубина жидкости слева от перегородки составляла 0,6 м, жидкость покоилась для всех приводимых ниже результатов. Расчетная область разбивалась на ячейки сеткой 150×50.

На рис. 2.26 приведены графики изменения глубины и скорости жидкости в точке 0, соответствующей центру разрушающейся дамбы. Левый график — глубина жидкости, правый — скорость. Пунктирная линия — измерения, полученные в лабораторном эксперименте (Fraccarollo, Toro, 1995), точечная линия — модельные вычисления на основе WAF-метода (Fraccarollo, Toro, 1995), сплошная черная линия — результат расчетов, полученные предлагаемым квазидвухслойным методом.

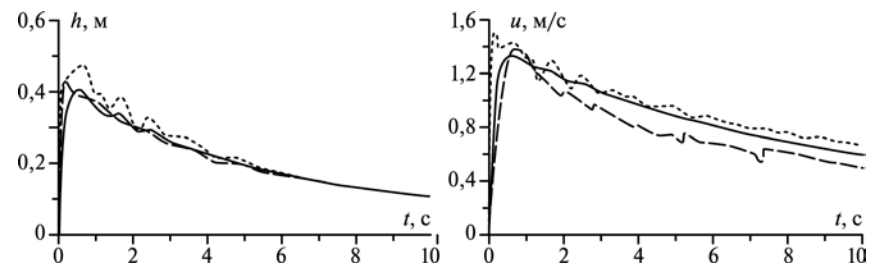
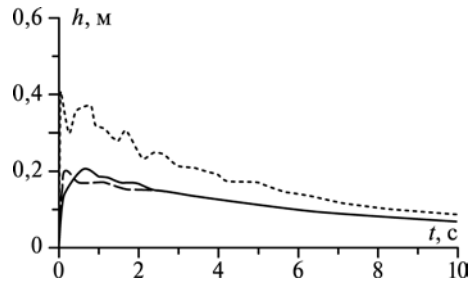
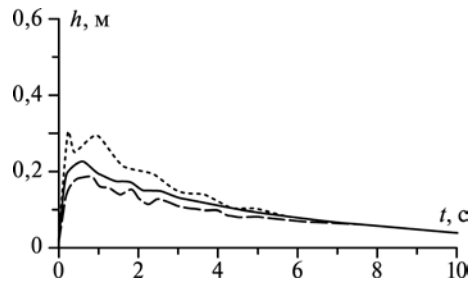


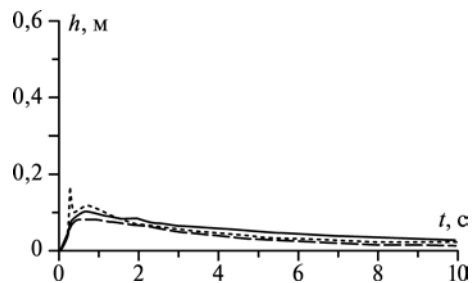
Рис. 2.26. Слева: зависимость глубины жидкости от времени в точке 0; справа: зависимость скорости жидкости в направлении x от времени в точке 0. Пунктирная линия результаты, полученные WAF-методом; точечная линия — результат измерений в лабораторном эксперименте; сплошная линия — результаты расчетов квазидвухслойным методом



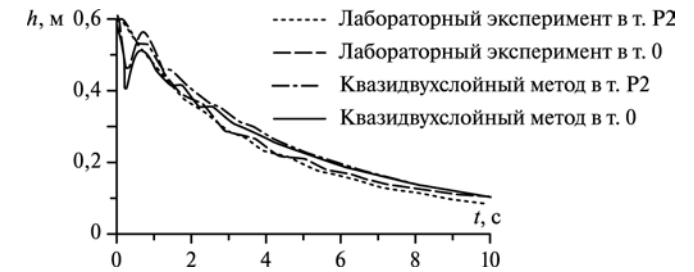
**Рис. 2.27.** Зависимость глубины жидкости от времени в точке P1. Пунктирная линия результаты, полученные WAF-методом; точечная линия — результат измерений в лабораторном эксперименте; сплошная линия — результаты расчетов квазидвухслойным методом



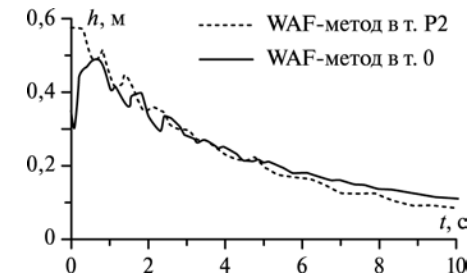
**Рис. 2.28.** Зависимость глубины жидкости от времени в точке P3. Пунктирная линия результаты, полученные WAF-методом; точечная линия — результат измерений в лабораторном эксперименте; сплошная линия — результаты расчетов квазидвухслойным методом



**Рис. 2.29.** Зависимость глубины жидкости от времени в точке P4. Пунктирная линия результаты, полученные WAF-методом; точечная линия — результат измерений в лабораторном эксперименте; сплошная линия — результаты расчетов квазидвухслойным методом



**Рис. 2.30.** Зависимость глубины жидкости от времени в эксперименте с наклонной подстилающей поверхностью



**Рис. 2.31.** Зависимость глубины жидкости от времени в эксперименте с наклонной подстилающей поверхностью



**Рис. 2.32.** Зависимость скорости жидкости в направлении  $x$  от времени в точке P5

На рис. 2.27–2.29 приведены динамика глубины жидкости для горизонтальной подстилающей поверхности в трёх контрольных точках: P1, P3 и P4.

На рис. 2.30 дана динамика глубины жидкости над наклонной подстилающей поверхностью в двух контрольных точках. Черная линия соответствует результатам моделирования квазидвухслойным методом в точке 0; серая линия, проходящая в непосредственной близости от пунктирной серой линии, — в точке P2. На рис. 2.31 приведены результаты расчетов WAF-методом для тех же точек. Хорошо видно, что предлагаемый квазидвухслойный метод хорошо согласуется с экспериментальными данными и увеличивает точность расчетов по сравнению с результатами, полученными в работе (Fraccarollo, Toro, 1995) WAF-методом. На рис. 2.32 приведена динамика скорости жидкости в направлении  $x$  в контрольной точке P5. Сплошная жирная серая линия — динамика, полученная экспериментально; сплошная тонкая серая линия — динамика, полученная численно на основе WAF-метода (Fraccarollo, Toro, 1995); сплошная жирная черная линия — динамика, полученная с помощью предлагаемого квазидвухслойного метода.

## 2.9. Выводы

Предложен вычислительный метод для моделирования течений тяжелой жидкости со свободной поверхностью над границей произвольной формы. Метод основан на представлении произвольной границы ступенчатой поверхностью и использовании традиционного метода Годунова в областях однородной горизонтальной поверхности и специальных вычислениях потоковых величин в областях, примыкающих к вертикальным особенностям рельефа дна. Расчет соответствующих потоков ведется на основе квазидвухслойной модели мелкой воды, являющейся уточнением классической однослойной модели по отношению к исходной системе уравнений Эйлера. Предложенный численный метод позволяет вести расчет гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над произвольным профилем дна. Метод обеспечивает единообразие построения решения в областях как со сложной геометрией подстилающей поверхности, так и ровного дна, экономичность при работе с большими расчетными областями по пространству, учет диссипации поступательной кинетической энергии у ступеньки и возможность добавления разнообразных стоков, массовых источников, трения. Работоспособность метода была проверена на основе решений нескольких классов гидродинамических задач, определяемых особенностями подстилающих поверхностей и описывающих различные физические

явления. Показано соответствие численных результатов решения задачи над наклонной плоскостью, аппроксимируемой множеством ступенек, результатам расчета, использующего точное решение стандартной задачи Римана с последующей заменой переменных.

Предложена конечно-разностная модель, позволяющая описать силу Кориолиса в численных методах годуновского типа для течений вращающейся мелкой воды. На основе предложенного представления разработан конечно-объемный алгоритм как для ровной границы, так и для границы произвольного вида. Метод основан на представлении произвольной подстилающей поверхности и силы Кориолиса комплексной нестационарной ступенчатой границей. Обсуждены границы применимости данного представления с точки зрения конечно-объемных численных методов. Конечно-разностная аппроксимация эффективной комплексной нестационарной поверхности осуществлена на основе квазидвухслойной модели мелкой воды. Предложенное представление адекватно описывает особенности нелинейных процессов, вызванные силой Кориолиса, в численных методах годуновского типа, поскольку корректно отражает нелинейную структуру течений вблизи особенностей, возникающих после дискретизации эффективной границы. На основе проведенного сравнительного анализа показано, что хорошо известные численные модели являются частным случаем реализованного квазидвухслойного метода. Заметим, что для реализации идеи квазидвухслойного метода можно использовать не только точные решения задачи Римана для уравнений мелкой воды, но и другие, приближенные решения этой задачи. Выявлено основное преимущество предлагаемого метода, позволяющее точнее описывать трансверсальную составляющую вектора скорости и тем самым минимизировать погрешность вычислений, индуцированных существенной двумерностью постановок задач для вращающейся жидкости.

Работоспособность метода подтверждена проведенным численным экспериментом по моделированию классической задачи геострофической адаптации, известной как задача Россби, и расчетом вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью параболического профиля. Разработанный численный метод обобщен на случай произвольной внешней силы. Достоверность результатов численного моделирования показана на основе решения задачи о разрушении двумерной дамбы над наклонной подстилающей поверхностью с учетом гидравлического трения и сравнения полученных решений с результатами имеющихся лабораторных экспериментов.

- Беликов В. В., Семенов А. Ю. (1997) Численный метод распада разрыва для решения уравнений теории мелкой воды // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 8. С. 1006–1019.
- Букреев В. И., Гусев А. В. (2003) Гравитационные волны при распаде разрыва над уступом дна открытого канала. Новосибирск: ПМТФ, 2003. Т. 44. № 4.
- Годунов С. К. (1988) Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
- Карельский К. В., Петросян А. С., Славин А. Г. (2004) Трансформация разрыва для потоков мелкой воды на скачке // Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность: Международная конф. МСС-04. М., 2004. С. 111–117.
- Карельский К. В., Петросян А. С. (2006) Задача о стационарном обтекании ступеньки в приближении мелкой воды // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 1. С. 15–27.
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. (2001) Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. (1988) Теоретическая физика. Т. 4. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 736 с.
- Овсянников Л. В. (1973) К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: Сб. Вып. 15. Новосибирск: СО АН СССР, 1973.
- Остапенко В. В. (2002) О разрывных решениях уравнений «мелкой воды» над уступом дна. Новосибирск: ПМТФ. 2002. Т. 43. № 6.
- Остапенко В. В. (2003) Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна. Новосибирск: ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4.
- Рожественский Б. Л., Яненко Н. Н. (1978) Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- Уизем Г. В. (1977) Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 567 с.
- Alcrudo F., Benkhaldoun F. (2001) Exact Solutions to the Riemann Problem of the Shallow Water Equations with a Bottom Step // Intern. J. Computers and Fluids. 2001. V. 30. P. 643–671.
- Audusse E., Bouchut F., Bristeau M.-O., Klein R., Perthame B. (2004) A Fast and Stable Well-Balanced Scheme with Hydrostatic Reconstruction for Shallow Water Flows // SIAM J. Scientific Computing (SISC). 2004. V. 25. Iss. 6. P. 2050–2065.
- Bernetti R., Titarev V. A., Toro E. F. (2007) Exact Solution of the Riemann Problem for the Shallow Water Equations with Discontinuous Bottom Geometry // J. Computational Physics. 2007. doi: 10.1016/j.jcp. 2007.11.033.
- Bouchut F., Le Sommer J., Zeitlin V. (2004) Frontal Geostrophic Adjustment and Nonlinear-wave Phenomena in one Dimensional Rotating Shallow Water. Pt. 2: High-resolution Numerical Simulations // J. Fluid Mechanics. 2004. V. 514. P. 35–63.
- Charney J. G., Fjortoft R. J. (1950) Von Neumann. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation // Tellus. 1950. V. 2. P. 237–254.
- Dowling T. E., Ingersoll A. P. (1989) Jupiter's Great Red Spot as a Shallow-Water System // J. Atmospheric Sciences. 1989. V. 46. N. 21. P. 3256–3278.
- Dube S. K., Sinha P. C., Roy G. D. (1985) The Numerical Simulation of Storm Surges Along the Bangla Desh Coast // J. Dynamics of Atmosphere and Oceans. 1985. V. 9. P. 121–133.
- Fraccarollo L., Toro E. F. (1995) Experimental and Numerical Assessment of the Shallow Water Model for Two-dimensional Dam-break Type Problems // J. Hydraulic Research. 1995. V. 33. N. 6. P. 843–864.
- Garvine R. W. (1987) Estuary Plume and Fronts in Shelf Waters: a Layer Model // J. Physical Oceanography. 1987. V. 17. P. 1877–1896.
- Hendershott M. C. (1981) Long Waves and Ocean Tides // Evolution of Physical Oceanography / Eds. Warren B. A., Wunsch C. Ch. 10. MIT Press, 1981. P. 292–341.
- Johns B., Dube S. K., Sinha P. C., Mohanty U. C., Rao A. D. (1982) The Simulation of Continuously Deforming Lateral Boundaries in Problems Involving the Shallow-Water Equations // Intern. J. Computers and Fluids. 1982. V. 10. N. 2. P. 105–116.
- Karelsky K. V., Papkov V. V., Petrosyan A. S. (2000a) The Initial Discontinuity Decay Problem for Shallow Water Equations on Slopes // Physics Letters A. 2000. V. 271. N. 5–6. P. 349–357.
- Karelsky K. V., Papkov V. V., Petrosyan A. S., Tsygankov D. V. (2000b) Particular Solutions of Shallow Water Equations Over non-flat Surface // Physics Letters. A. 2000. V. 271. N. 5–6. P. 341–348.
- Karelsky K. V., Petrosyan A. S., Slavina A. G. (2006) Quasi-two-layer Model for Numerical Analysis Shallow Water Flows on Step // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2006. V. 21. N. 6.
- Le Somme J., Medvedev S. B., Plougouven R., Zeitlin V. (2003) Singularity Formation During Relaxation of Jets and Fronts Toward the State of Geostrophic Equilibrium // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2003. Sept. V. 8. N. 3. P. 415–442.
- LeVeque R. J. (1998a) Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-resolution Godunov Methods: the Quasi-steady Wave-propagation Algorithm // J. Computational Physics. 1998. V. 146. P. 346–365.
- LeVeque R. J. (1998b) Wave-propagation Algorithms for Multidimensional Hyperbolic Systems // J. Comput. Phys. 1998. V. 131. P. 327–353.
- Nihoul J. C. J., Rood J. C. (1975) The Influence of Tidal Stresses on the Residual Circulation // Tellus. 1975. V. 29. P. 484–490.
- Reznik G. M., Zeitlin V., Ben Jelloul M. (2001) Nonlinear Theory of Geostrophic Adjustment. Pt. 1. Rotating Shallow-water Model // J. Fluid Mechanics. 2001. V. 445. P. 93–120.
- Stoker J. J. (1957) Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. N. Y.: Interscience, 1957.
- Toro E. F. (1992) Riemann Problems and the WAF Method for Solving the Two-dimensional Shallow Water Equations // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1992. V. 338. P. 43–68.
- Vreugdenhil C. B. (1994) Numerical Methods for Shallow-Water Flow. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 1994.



## Содержание

Введение .....	3
<b>ГЛАВА 1. Задача Римана для течений мелкой воды над ступенчатым профилем дна .....</b>	<b>8</b>
1.1. Введение .....	8
1.2. Стационарные уравнения мелкой воды. Области допустимых решений .....	10
1.3. Анализ возможных стационарных режимов обтекания ступеньки .....	18
1.4. Формулировка квазидвухслойной модели течений на уступе дна .....	22
1.5. Нестационарные волновые картины над уступом дна .....	37
1.6. Результаты численного моделирования нестационарного обтекания уступа и сравнение с известными численными и точными решениями .....	47
1.7. Обсуждение аналитического подхода и квазидвухслойной модели. Анализ численных решений .....	61
1.8. Выводы .....	66
<b>ГЛАВА 2. Использование квазидвухслойного подхода для численного моделирования течений мелкой воды над сложной подстилающей поверхностью в присутствии внешних сил .....</b>	<b>69</b>
2.1. Введение .....	69
2.2. Конечно-разностная схема для уравнений мелкой воды над подстилающей поверхностью произвольного профиля .....	72
2.3. Численное моделирование течений жидкости над подстилающей поверхностью сложного профиля .....	78
2.4. Представление силы Кориолиса в методах Годуновского типа на основе квазидвухслойной модели .....	88
2.5. Метод Годунова для уравнений вращающейся мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью с применением квазидвухслойного метода .....	94
2.6. Результаты численного моделирования вращающейся мелкой воды .....	105
2.7. Метод Годунова для уравнений вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью произвольного профиля в рамках квазидвухслойного приближения .....	110
2.8. Исследование течений мелкой воды над произвольным профилем дна в присутствии внешней силы .....	116
2.9. Выводы .....	124
<b>Литература .....</b>	<b>126</b>

055(02)2

Ротап rint ИКИ РАН  
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати 06.07.10

Заказ 2211

Формат 70×1081/32

Тираж 75

5,3 уч.-изд. л.