На правах рукописи

БАХШИЯН Борис Цолакович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ И КОРРЕКЦИИ

05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2001

Работа выполнена в институте космических исследований РАН

Официальные оппоненты:

д-р физ-мат. наук. проф. **Колмановский В.Б.**

д-р физ-мат. наук проф. **Меликян А.А.**

д-р физ-мат. наук проф. **Хрусталев М.М.**

Ведущая организация:

Институт проблем управления РАН

Защита диссертации состоится 3 июля 2001 г. в 16 часов в конференц-зале на заседании диссертационного совета Д 212.133.01 при Московском государственном институте электроники и математики по адресу: 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3/12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного института электроники и математики.

Автореферат разослан 31 мая 2001г.

Учёный секретарь

Диссертационного Совета

канд. техн. наук,

доцент С.Е. Бузников

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Настоящая работа посвящена решению оптимальных задач определения и коррекции движения системы. Обе эти задачи тесно связаны между собой, являясь составными частями так называемого дискретного управления движением, при котором управляющие воздействия подаются не непрерывно, а в виде дискретных корректирующих импульсов, скачкообразно изменяющих характер движения управляемой системы. При этом каждой коррекции предшествует определение фактического движения, на основе которого вычисляется потребное значение корректирующего импульса. Классическим примером подобного управления может служить коррекция орбиты космического аппарата с использованием корректирующего двигателя большой тяги. Подобный способ управления может быть использован при решении других прикладных задач. Кроме того, задачи определения движения различных реальных систем по результатам измерений имеют самостоятельное значение. Необходимость в их решении возникает при обработке данных наблюдений и результатов различных экспериментов, определении физических констант и т. п.

Методы решения рассматриваемых задач существенным образом зависят от принятых допущений об ошибках используемых исходных данных (математической модели движения и его коррекции, априорных сведений о параметрах этой модели, измерений). При этом в литературе обычно используется классический вероятностный подход, предполагающий знание характеристик распределений вероятностей ошибок исходных данных. В работах других исследователей, в том числе и автора, используется также гарантирующий подход, при котором функции распределения вероятностей ошибок исходных данных считаются неизвестными, а задаются лишь некоторые множества, которым могут принадлежать указанные функции. При этом отыскивается способ решения рассматриваемых задач, гарантирующий достижение поставленной цели при наихудшем возможном распределении ошибок исходных данных. Оптимизация этого способа приводит к минимаксной или максиминной задачам и соответствующий подход называют минимаксным.

При решении многих задач рассматриваемого типа влияние сколь угодно малых отклонений от принятого распределения вероятностей ошибок неограниченно возрастает с увеличением числа используемых измерений. Это явление обычно называют неустойчивостью получаемых результатов по основным допущениям. Поэтому результаты, найденные на основе гарантирующего подхода, в ряде случаев оказываются значительно ближе к реальным условиям решения прикладных задач, чем выводы, получаемые при вероятностном подходе. Многочисленные работы, посвященные минимаксному подходу, можно условно разделить на несколько групп.

В работах Н.Н.Красовского, А.Б.Куржанского, И.Я.Каца,
Б.И.Ананьева, М.И.Гусева, В.С.Пацко рассматриваются общие вопросы анализа этих задач, аналитические и численные методы их решения (в основном в случае непрерывного управления). Получению почти оптимального решения и оценке его неоптимальности посвящены работы Ф.Л.Черноусько (теория эллипсоидального оценивания) и А.И.Матасова. Спектральные постановки задач минимаксного оценивания рассмотрены в книге О.М.Куркина, Ю.Б.Коробочкина, С.А.Шаталова. В работах М.Л.Лидова, И.К.Бажинова, Л.Ю.Белоусова, М.И.Войсковского, Р.Р.Назирова,В.Н.Почукаева, В.Н.Соловьева рассматриваются задачи оценивания, в которых заданы лишь границы на первые и вторые моменты возмущений, и исследуются возникающие при этом задачи математического программирования. Многие результаты этого направления отражены в книге Б.Ц.Бахшияна, Р.Р.Назирова, П.Е.Эльясберга и в обзорной статье М.Л.Лидова, Б.Ц.Бахшияна, А.И.Матасова.

При неудачном использовании метода оценивания гарантирующий подход может дать слишком грубые результаты. Во многих задачах целесообразно найти решение в рамках классического вероятностного подхода. Таким задачам, называемым задачами планирования эксперимента, посвящена обширная литература (например, книги В.В.Федорова, С.М.Ермакова, А.А Жиглявского, В.Б.Меласа, Ф.Пукельхейма). В работах В.И.Карлова, А.И.Кибзуна, М.Н.Красильщикова, В.В.Малышева, Т.Базара, С.Верду, Т.Нишимуры некоторые прикладные статистические задачи приводятся к минимаксным задачам оценивания специального вида.

В связи с изложенным актуальными являются задачи оптимального выбора алгоритма оценивания и программы коррекции при каждом из указанных подходов. При использовании гарантирующего подхода для широкого класса таких задач оценивания оптимальным является линейный алгоритм. При этом минимаксную задачу часто удается свести к вырожденным или обобщенным задачам линейного программирования. С другой стороны, рассмотренные ниже задачи L- и MV-оптимального планирования эксперимента, задача робастного оценивания при неточно заданной функции распределения, а также оптимальная задача идеальной линейной коррекции с ограничениями на импульсы также сводятся к обобщенным задачам линейного программирования. При их решении возникают следующие проблемы.

1. Обобщенная задача линейного программирования уже не всегда решается так же эффективно, как обычная задача, поскольку проверка условий оптимальности представляет собой отдельную подзадачу. Если эта подзадача решается достаточно просто, например, аналитически, то и обобщенная задача решается так же эффективно, как и обычная задача линейного программирования тех же размеров. В диссертации получено решение указанных подзадач, соответствующих ряду важных задач оценивания и коррекции параметров.

2. В процессе решения как обобщенной, так и обычной задачи линейного программирования могут возникать (и возникают, как показывает опыт) большое количество вырожденных итераций, при проведении которых целевая функция не изменяется. Это связано с тем, что для вырожденного плана обычно используемые достаточные условия оптимальности не являются, вообще говоря, необходимыми. При этом резко снижается эффективность симплекс-метода. Для обобщенной задачи появление таких итераций является регулярным случаем и может быть причиной сходимости к неоптимальному значению функционала. Вместе с тем, до последнего времени не был разработан алгоритм, основанный на критерии оптимальности. Решение этого вопроса и создание теории линейного программирования, включающего вырожденный случай, проведено в диссертации.

Целью работы является развитие методов линейного программирования и решение с их помощью оптимальных задач оценивания и коррекции параметров системы, а также получение на их основе некоторых качественных и аналитических результатов.

Новизна работы. В работе впервые создана теория линейного программирования (в том числе и обобщенного), основанная на необходимых и достаточных условиях оптимальности и пригодная для вырожденного случая. Впервые показано, что L-задача оптимального планирования эксперимента может быть сведена к задаче идеальной линейной коррекции и эффективно решена как обобщенная задача линейного программирования. Впервые получен критерий оптимальности для MV-задачи , и с помощью его найдены алгоритм решения в общем случае и аналитическое решение для случая полиномиальной регрессии. Данные результаты использованы для оптимального выбора программы измерений при оценивании геодинамических параметров Земли. Впервые показано, что задача робастного оценивания с линейными ограничениями на оцениваемые параметры может быть эффективно решена как обобщенная задача линейного программирования. То же самое показано для некоторых минимаксных задач оценивания и для задачи оптимальной идеальной линейной коррекции с ограничениями на корректирующие импульсы. Проведены массовые расчеты для спутника Земли и показано, что оптимальная программа коррекции при достаточно малом пороге, ограничивающем величины импульсов, очень хорошо моделирует оптимальную непрерывную коррекцию двигателя с малой тягой. В работе также развита теория линейного несмещенного оценивания – установлено точное описание множества весовых матриц метода наименьших квадратов, определяющих заданную несмещенную оценку, и обобщены теоремы эквивалентности, позволяющие в схеме с мешающими параметрами рассматривать только линейные оценки при условиях несмещенности и без мешающих параметров.

Методы исследования. В работе используются методы математического программирования, линейной алгебры, матричного анализа, теории вероятностей, теоретической астродинамики.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что они являются основой для создания эффективного программного обеспечения на ЭВМ. Для всех рассмотренных в диссертации задач построены эффективные алгоритмы, которые реализованы на ЭВМ при решении конкретных задач навигации космических объектов (в частности, для проектов "Вега" и "Лагеос").

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на

– Всесоюзном совещании-семинаре "Проблемы оптимизации и управления динамическими системами" (Владивосток, 1987);

– семинаре центрального экономико-математического института под рук. Е.Г.Гольштейна (Москва, 1987);

– семинаре института математики и механики УНЦ СССР (г.Свердловск, 1988);

– VII Всесоюзной конференции "Управление в механических системах" (Свердловск, 1990);

– III Всесоюзной школе по навигации и управлению движущимися объектами (Феодосия, 1990);

– Всероссийской конференции "Общие проблемы управления и их приложения к математической экономике" (Тамбов, Россия, 2000 г.);

– научном семинаре "Механика, управление и информатика" ИКИ РАН (Москва, 2000);

– семинарах под руководством акад. Ф.Л. Черноусько (ИПМех РАН); акад.Я.З.Цыпкина (ИПУ РАН); профессоров В.Н.Афанасьева, В.Б.Колмановского, В.Р.Носова (МИЭМ); проф. А.И. Кибзуна (МАИ).

По теме диссертации опубликованы 24 печатные работы, в том числе одна монография.

Результаты диссертационной работы являются основой проектов "Решение оптимальных задач оценивания и коррекции параметров системы методами линейного программирования" (поддержан РФФИ, проект N ° 95-01-00807) и "Разработка эффективных методов решения задач планирования эксперимента и коррекции движения и их использование в космической навигации" (поддержан РФФИ, проект N ° 98-01-00384), в которых автор был научным руководителем.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы - 260 м.п.с., напечатанных в текстовом редакторе TeX. Библиография - 102 названия. Текст содержит 14 рисунков, 9 таблиц.

Краткое содержание работы

Во введении описано состояние проблемы, обоснована актуальность тематики диссертационной работы, изложены основные идеи диссертации, приведена общая характеристика работы.

В главе 1 рассматриваются некоторые теоретические аспекты используемой далее теории линейного оценивания, которые применяются в дальнейших исследованиях и имеют самостоятельное методологическое значение. Пусть модель измерений есть

$$y = H^{\mathrm{T}}\theta + \xi,$$

где векторы y и $\xi \in \mathbf{R}^n$ — соответственно векторы измерений и ошибок, $\theta \in \mathbf{R}^m$ – вектор оцениваемых параметров, H – известная матрица. Пусть $L = C\theta$ — векторная линейная функция. Здесь C — известная матрица. Рассмотрим метод наименьших квадратов для определения оценок $\hat{\theta}, \hat{L}$:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\hat{\theta}}(y - H^{\mathrm{T}}\hat{\theta})^{\mathrm{T}} W (y - H^{\mathrm{T}}\hat{\theta}),$$

$$\hat{L} = C\hat{\theta} = C\left(HWH^{\text{т}}\right)^{-1}HWy,$$

где W — заданная неотрицательно определенная весовая матрица, дающая оценку наименьших квадратов. Как видно, каждой весовой матрице W соответствует линейный алгоритм, удовлетворяющий условию его несмещенности: если $\xi = 0$, то $\hat{L} = L$ при любых θ. В разделе 1.1 рассмотрена обратная задача: найти множество всех неотрицательно определенных матриц W, дающих линейную оценку $\hat{L} = Xy$ (X – $k \times n$-матрица), удовлетворяющую указанному условию несмещенности, которое имеет вид $XH^{\text{т}} = \mathrm{C}$. Другими словами отыскиваются все неотрицательно (или положительно) определенные решения матричного уравнения

$$X = C\left(HWH^{\text{т}}\right)^{-1}HW.$$

Задача нахождения этого множества рассматривалась различными авторами. Нами дано конкретное и наиболее подробное описание этого множества и проанализированы различные случаи подбора весовой матрицы с наибольшим количеством нулей вне диагонали. Указаны возможности применения полученных выражений при оценивании параметров системы.

На практике при оценивании параметров обычно некоторый подвектор θ_2 вектора θ принимают равным своему априорному значению $\tilde{\theta}_2$ $(\theta_2 \neq \theta)$, а оцениваемым вектором считают совокупность θ_1 остальных компонент вектора θ. При указанном подходе вектор θ_2 называют мешающим параметром. Согласно разделу 1.2, справедливы следующие результаты: в силу теоремы 3.1, если априорное значение оцениваемого вектора включить в число измерений, то множество линейных несмещенных оценок, получаемое при всевозможных матрицах X_1, удовлетворяющих условию несмещенности, и соответствующее некоторому выбору вектора θ_2 мешающих параметров, не зависит от этого выбора, совпадая тем самым с множеством линейных оценок, соответствующим отсутствию вектора мешающих параметров, т.е. случаю $\theta_1 = \theta$; в силу теоремы 3.2 такое же утверждение имеет место для метода наименьших квадратов с мешающими параметрами. Эти результаты имеют более общий вид, чем аналогичные теоремы (так называемые теоремы эквивалентности), полученные другими авторами. Указанные выводы позволяют при построении оптимальных алгоритмов оценивания анализировать лишь линейные несмещенные алгоритмы.

Во вспомогательном разделе 1.3 приведены выражения для характеристик ошибок линейного оценивания при наличии действующих на систему сил, не учитываемых в модели оценивания.

В главе 2 рассмотрены некоторые простые задачи оптимального оценивания и коррекции траектории, сводящиеся к обычной или обобщенной задаче линейного программирования, для которых могут быть даны ясные интерпретации решения и получены важные методологические выводы. Более общие задачи рассмотрены в главах 4 – 6. В разделе 2.1 рассмотрен классический вероятностный и гарантирующий подходы при решении оптимальных задач оценивания. Показано, что классический подход к вычислению точности оценивания может давать слишком оптимистические результаты. Приведены выражения для гарантирующих характеристик точности, когда средние и ковариации лежат в заданных параллелепипедах. В разделе 2.2 показано, что задача C-оптимального оценивания (т.е. оценивания скалярного параметра) в схеме линейной регрессии при возможности повторения измерений (задача планирования эксперимента) сводится к той же задаче линейного программирования, что и задача минимизации гарантирующей дисперсии, полученная при возможности произвольной корреляции между измерениями, т.е. оптимальные программы измерений совпадают для наиболее оптимистического и пессимистического допущений. Этот результат удивителен и методологически значим.

В разделе 2.3 рассматривается задача оптимальной идеальной линейной коррекции без ограничений. Затраты на каждую коррекцию есть некоторая норма корректирующего импульса, для которого известна двойственная норма. Показывается, что задача может быть решена, как и в известном случае евклидовой нормы, методом генерации столбцов для обобщенного линейного программирования. При этом число импульсов не превосходит числа корректируемых параметров.

В главе 3 получены критерии оптимальности для вырожденной и обобщенной задач линейного программирования и на их основе разработаны монотонные алгоритмы решения этих задач. Обычно считается, что решение задач линейного программирования сим-

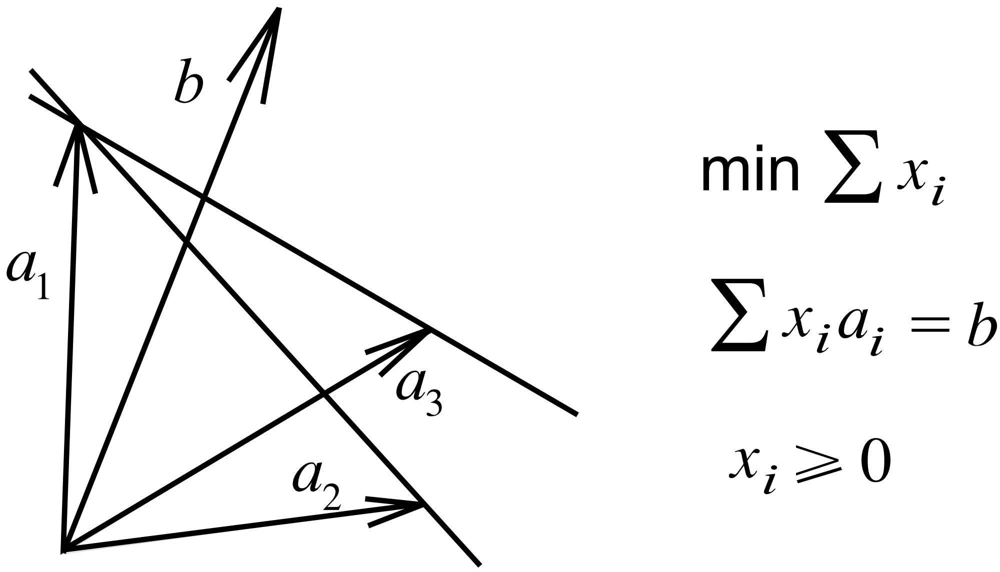
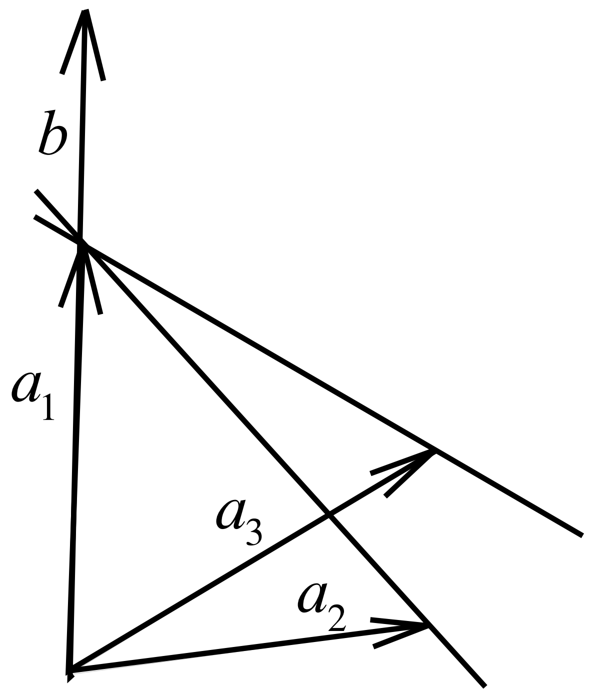


Рис.1. Симплекс-метод для невырожденной задачи

плексным методом всегда эффективно. Именно поэтому мы и стремились свести оптимальные задачи оценивания и коррекции траектории к задачам линейного программирования. Однако если вектор правых частей $b \in \mathrm{R}^m$ задачи линейного программирования всегда есть линейная комбинация векторов условий с положительными коэффициентами и число k этих векторов равно m, то при отсутствии вырожденных базисов решение достигается за конечное число итераций, так как достаточное условие оптимальности является и необходимым. Геометрически для случая $m = 2$, изображенного на рис.1, невырожденность задачи означает, что вектор b не совпадает ни с одним из векторов a_i.

При $k < m$ имеет место вырожденный случай (рис.2). При этом использование обычного симплексного метода может приве-



$$\min \sum x_i$$

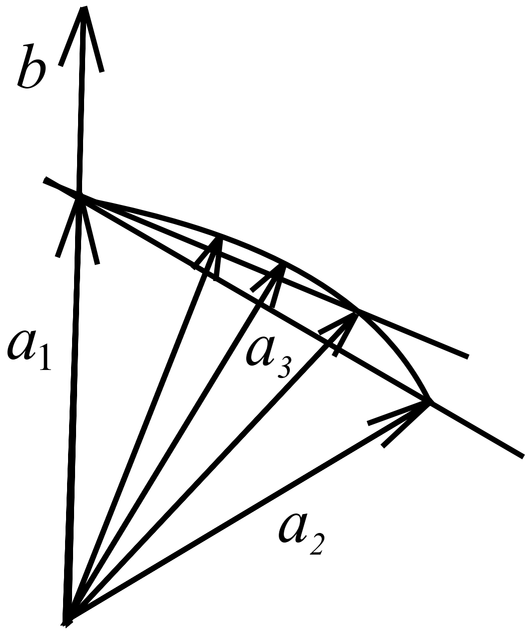
$$\sum x_i a_i = b$$

$$x_i \geqslant 0$$

$$b = k \cdot a_1$$

$$k > 0$$

Рис.2. Симплекс-метод для вырожденной задачи



$$\min \sum x_i$$

$$\sum x_i a_i = b$$

$$x_i \geqslant 0$$

$$a_i \in \mathcal{A}$$

Рис.3. Симплекс-метод для вырожденного случая в обобщенной задаче линейного программирования

сти к большому числу вырожденных итераций, при которых целевая функция не изменяется, или даже к возникновению цикла. Действительно, при вводе в базис согласно симплексной итерации вектора a_3 , значение целевой функции не изменяется и это может повторяться много раз. Обобщенная задача линейного программирования характеризуется континуумом векторов условий; при этом вырожденный случай не является исключительным, а число вырожденных итераций может стать бесконечным (рис.3). Предлагаемые алгоритмы выхода из вырожденной итерации основаны на некотором (иногда виртуальном) изменении целевой функции. Наиболее эффективным из этих алгоритмов является, по видимому, алгоритм

Вулфа, который, однако, не применим для обобщенной задачи линейного программирования.

В разделе 3.1 нами получен критерий оптимальности задачи линейного программирования, заключающийся в следующем. Пусть задача линейного программирования имеет вид

$$\min_x \left\{ c^T x : \quad \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b, \quad x = (x_1, ..., x_n)^T \geq 0 \right\}$$

($c \in \mathrm{R}^n$, $b, a_i \in \mathrm{R}^m$) и текущий базисный вектор x содержит k ненулевых компонент, причем $k < m$. Пусть $\mathcal{I}_+$ – множество индексов этих ненулевых компонент. Множество $\{a_i, i \in \mathcal{I}_+\}$ назовем строгим базисом. Пусть $\mathcal{U}$ – подпространство, порожденное векторами строгого базиса, $\mathcal{V}$ – некоторое подпространство, такое что $\mathrm{R}^m = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Например, можно взять в качестве $\mathcal{V}$ ортогональное дополнение к $\mathcal{U}$ в R^m.

Согласно теореме 3.1, вектор x оптимален тогда и только тогда, когда имеет конечный оптимум задача линейного программирования с $n-k$ переменными и $m-k$ независимыми ограничениями-равенствами

$$\min_{y_i} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \Delta_i y_i : \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_0} y_i v_i = d, \quad y_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}_0 \right\},$$

где $\mathcal{I}_0 \doteq \{1, ..., n\} \setminus \mathcal{I}_+$; $\Delta_i = c_i - \pi^T a_i$; π – любое решение системы уравнений $c_i - \pi^T a_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_+$; векторы $v_i \in \mathcal{V}$ определяются разложением $a_i = u_i + v_i$, $u_i \in \mathcal{U}$; $d \in \mathcal{V}$ – любой вектор, для которого совместны ограничения во вспомогательной задаче. При случайном выборе d вспомогательная задача не вырождена с вероятностью 1. Число ограничений-равенств задачи линейного программирования будем называть размерностью этой задачи, так как оно есть порядок обращаемой матрицы и определяет в основном эффективность решения задачи. Таким образом, для проверки условия оптимальности нужно решить невырожденную вспомогательную задачу размерности меньшей исходной. При $k = m$, т.е. в частном случае невырожденного базисного решения, условия теоремы 3.1 превращаются в известные достаточные условия оптимальности: $\Delta_i \geq 0 \ \forall\, i$.

Если критерий оптимальности не выполняется, то согласно теоремам 3.2 и 3.3 можно уменьшить целевую функцию путем изменения строгого базиса $\{a_i,\, i \in \mathcal{I}_+\}$. А именно, согласно теории линейного программирования для невырожденного случая, в процессе решения вспомогательной задачи симплекс-методом находятся линейно независимые векторы $a_i, \quad i \in \mathcal{S}$, такие что при некоторых λ_i выполняются условия

$$\sum_{i\in \mathcal{S}} \lambda_i v_i = 0, \quad \sum_{i\in \mathcal{S}} \Delta_i\lambda_i < 0; \quad \lambda_i > 0, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Здесь $\mathcal{S}$ – некоторое множество индексов из $\mathcal{I}_0$, $|\mathcal{S}| \leq m - k + 1$. Эти векторы вводятся в строгий базис. Выводимые векторы определяются следующим образом. Первое из вышеприведенных условий эквивалентно равенству

$$\sum_{j\in \mathcal{S}} \lambda_j a_j = \sum_{i\in \mathcal{I}_+} \mu_i a_i,$$

которое означает, что вектор $\sum_{j\in \mathcal{S}} \lambda_j a_j$ однозначно разлагается по векторам строгого базиса. Тогда из строгого базиса выводятся векторы $a_j,\ j \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R} = \{r:\ x_r/\mu_r = \theta\}$, $\theta \doteq \min_j \{x_j/\mu_j:\ \mu_j > 0\}$.

Алгоритм метода, обоснованного теоремами 3.1 — 3.3, зависит от выбора матрицы V , дополняющей матрицу строгого базиса U до базисной матрицы B . В пункте 3.1.3 описан алгоритм для случая, когда B найдена в результате обычных симплексных итераций, приведших к текущему вырожденному решению. Указан другой способ выбора базисной матрицы, особенно эффективный при $k << m$.

В пункте 3.1.4 дан эквивалентный критерий оптимальности текущего базисного решения, с помощью которого найдены полезные оценки минимума, которые позволяют повысить эффективность алгоритма.

Таким образом, приведенная теория линейного программирования и соответствующий симплексный алгоритм естественно обобщают классическую теорию и алгоритм, известные ранее для невырожденного случая. В пункте 3.1.5 показано, что новый алгоритм может позволить решать большие вырожденные задачи линейного программирования, что практически невозможно сделать методами, основанными на достаточных условиях оптимальности. Алгоритм опробован на примере решения задачи составления расписания авиаперевозок, для которой задача линейного программирования имеет 80 строк и 3135 столбцов. Показано, что новый алгоритм в большинстве случаев не уступает алгоритму Вулфа, и становится эффективнее его при небольших значениях $(m-k)/m$.

В разделе 3.2 развиты некоторые аспекты теории обобщенной задачи линейного программирования. Записаны различные формы этой задачи. Выявлены условия, при которых обобщенная задача может быть решена методом генерации столбцов. Показано, что эффективность решения обобщенной и обычной задач линейного программирования равной размерности не отличаются, если легко решается подзадача проверки условия оптимальности.

Рассмотрен вырожденный случай, который для обобщенной задачи является регулярным. Для нее выписан аналогичный выведенному в разделе 3.1 критерий оптимальности, сводящийся к решению вспомогательной обобщенной задачи линейного программирования размерности $m - k$. Однако, в отличие от обычной задачи линейного программирования, эта вспомогательная задача уже не может быть, вообще говоря, сделана невырожденной путем выбора вектора d правых частей ограничений. Мы можем лишь решать вспомогательную задачу тем же методом, прибегая в случае вырожденности вспомогательной задачи к рекурсии и понижая порядок возникающих вырожденных задач линейного программирования.

Установлены условия сходимости алгоритма по функционалу в следующем смысле. Показано,что если алгоритм сходится к неоптимальному допустимому базисному решению, то это — вырожденное решение. Если взять это решение за текущее, то, согласно изложенному выше алгоритму, можно строго уменьшить целевую функцию на конечную величину.

Глава 4 посвящена разработке теории и алгоритмов решения задач L- и MV-оптимального планирования эксперимента и их применению. Рассмотрены классические задачи планирования эксперимента, в которых в схеме линейной регрессии с m неизвестными параметрами имеется возможность повторения измерений одной и и той же функции параметров при заданном общем числе измерений. Нормированное количество повторных измерений есть вероятностная мера, которая называется непрерывным планом эксперимента и принадлежит симплексу (при этом пренебрегается целочисленность числа повторных измерений). В зависимости от критерия оптимальности рассматриваются две задачи нахождения оптимального плана при использовании метода наименьших квадратов:

L-задача — минимизируется сумма дисперсий s оценок контролируемых параметров из m неизвестных параметров, $s \le m$;

MV-задача — минимизируется максимальная из этих дисперсий.

Задачи ставятся путем использования вариационного подхода, при котором метод наименьших квадратов заменяется в соответствии с теоремой Гаусса-Маркова оптимальным линейным несмещенным оцениванием. При этом спецификой решения этих задач является то обстоятельство, что не каждый план измерений из симплекса является допустимым для несмещенного линейного оценивания. Это обстоятельство ранее не учитывалось, что послужило не вполне строгому рассмотрению задачи рядом авторов.

В разделе 4.1 дана строгая постановка задачи. В разделе 4.2 показано, что L-задача сводится к задаче оптимальной линейной коррекции ms параметров, эффективно решаемой методом генерации столбцов. При этом оптимальный план, получаемый из решения обобщенной задачи линейного программирования, содержит не более ms ненулевых компонент. В то же время известно, что существует оптимальный план, содержащий не более чем $m_0 = ms - s(s-1)/2$ компонент. Показано, что такой план можно получить из оптимального плана с ms компонентами путем решения обычной задачи линейного программирования с m_0 ограничениями-равенствами. В этом же разделе получены необходимые и достаточные условия оптимальности плана.

В разделе 4.3 рассмотрена MV-задача . Она представлена как минимаксная задача, где максимум берется по дополнительно введенному вектору μ размерности s, принадлежащему симплексу Σ_s . Показано, что минимаксную задачу можно представить в виде максиминной. Это позволило получить необходимые и достаточные условия оптимальности MV-задачи , а также интерпретировать эту задачу как проектную задачу оптимальной линейной импульсной коррекции, в которой оптимальный корректируемый вектор $b(\mu^*)$ отыскивается из условия, что минимальные затраты на коррекцию при каждом μ будут максимальными среди всех μ из симплекса.

Это позволило предложить покоординатный спуск по μ, причем на каждом шаге значение целевой функции не убывает.

В разделе 4.4 при помощи построенной теории найдено аналитическое решение MV-задачи для случая полиномиальной регрессии при $m \leq 11$. При этом минимизируется максимальный коэффициент при степенях полинома (т.е. $s = m$). Оказывается, что при $m \neq 5$ оптимальный план совпадает с оптимальным планом для задачи оценивания скалярного параметра, имеющего максимальную дисперсию. При $m = 5$ две дисперсии имеют одинаковое максимальное значение и аналитическое решение получено при помощи найденного нами критерия оптимальности.

В разделе 4.5 решаются практически важные задачи об оптимальном по L- и MV-критериям использовании наблюдательных пунктов при уточнении геодинамических параметров Земли по наблюдениям ее искусственного спутника сетью станций. При этом использование оптимальной методики позволяет уменьшить дисперсии определяемых значений координат полюса Земли на 30-40%.

В главе 5 рассмотрен класс задач, в которых в конечном евклидовом пространстве минимизируется некоторая норма $p(x)$ при линейных ограничениях (проблема моментов). Постановки задач даны в разделе 5.1. В разделе 5.3 рассмотрен случай, когда норма может быть представлена как опорная функция некоторого симметричного относительно нуля выпуклого компакта Γ, т.е.

$$p(x) = \max\{x^{\mathrm{T}}\gamma : \ \gamma \in \Gamma\} = x^{\mathrm{T}}\gamma(x),$$

и явно или достаточно просто находится функция $\gamma(x)$, реализующая этот оптимум. Показано, что получаемая минимаксная задача может быть сведена к обобщенной задаче линейного программирования с $n+1$ ограничениями-равенствами и $n+m$ переменными (n – число переменных оптимизации, m — число линейных ограничений в исходной задаче). Доказано, что если $(\pi^{\text{т}} \in \mathrm{R}^n, \quad \rho \in \mathrm{R}^1)$ — текущий двойственный вектор, то существует оценка для оптимума: $\rho \leq p(x^*) \leq p(\pi)$ и метод генерации столбцов улучшает эту оценку на каждой итерации (при отсутствии вырождения). В качестве приложения теории показана возможность эффективного решения минимаксной задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями.

В разделе 5.5 рассматривается задача робастного оценивания $s-$ вектора θ параметров по n измерениям $z_i = H_i^{\text{т}}\theta + \xi_i$, $i = 1, ..., n$, при m линейных ограничениях на оцениваемые параметры

$$A\theta \geq b,$$

где b – заданный $m-$ вектор, A – $m \times s$ матрица. В теории робастного оценивания предполагается, что ошибки измерений есть независимые между собой случайные величины, функция распределения каждой из которых представляется в виде выпуклой комбинации двух функций распределения: $F_\xi(x) = (1-\varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon G(x)$, где ε – некоторое положительное число, не большее единицы, $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения, вид функции $G(x)$ распределения вероятности не известен. Для такой модели в предположении, что n достаточно велико и может быть применен закон больших чисел, Хьюбером обоснован устойчивый к возможно большим ошибкам измерений (робастный) метод оценивания. В этом методе оценка $\hat{\theta}$ вектора θ определяется следующим образом:

$$\theta = \arg\min_{\theta} \{F(\theta) : A\theta \geq b\},$$

где $F(\theta) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i(\theta))$, $x_i(\theta) = z_i - H_i^{\text{т}}\theta$, функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \doteq \begin{cases} x^2/2 & , \ |x| \leq C, \\ |x|C - C^2/2 & , \ |x| > C, \end{cases}$$

а величина C однозначно определяется по ε. При этом целевая функция может быть представлена уже как максимум квадратичной функции от γ:

$$F(\theta) = \max_{\gamma} \left\{ x(\theta)^{\text{т}}\gamma - \frac{1}{2}\gamma^{\text{т}}\gamma : \ |\gamma_i| \leq C, \ i = 1, ..., n \right\},$$

где $x(\theta)$ – вектор с компонентами $x_i(\theta)$. Тем не менее, это позволило свести задачу к обобщенной задаче с $s+1$ ограничениями и $n+s$ переменными (число ограничений m не влияет на размеры задачи). При этом, аналогично предыдущему разделу , имеет место оценка для оптимума $\rho \leq F(\hat{\theta}) \leq F(\pi)$, где $\pi \in \mathrm{R}^s$ и скаляр ρ — компоненты двойственного вектора на текущей итерации метода генерации столбцов. Вычисления показали, что этот метод при не слишком малых ε превосходит обычно используемый итеративный метод уже при $s \geq 4$. Кроме того, на эффективность симплексного алгоритма практически не влияет число ограничений m.

В разделе 5.4 рассмотрена задача минимизации нормы $p(x)$ с известной двойственной нормой $p^*(\gamma) \doteq \max\{\gamma^{\text{т}}\alpha : \ p(\alpha) = 1\}$. Таким образом, решается задача раздела 5.3 при условии, что можно взять $\Gamma = \{\gamma : \ p^*(\gamma) \le 1\}$. Тогда задача сводится к задаче обобщенного линейного программирования с m ограничениями-равенствами, что при $m \ll n$ позволяет существенно улучшить алгоритм. На каждом шаге также имеет место оценка для оптимума, а проверка условия оптимальности сводится к вычислению двойственной нормы $p^*(A^{\text{т}}\pi)$, где A — матрица линейных ограничений $Ax \ge b$. Показано, что к этому случаю сводится практически важная задача гарантирующего оценивания при условии, что все измерения разбиты на несколько групп, так что измерения внутри каждой группы могут быть произвольно коррелированы, а измерения из разных групп не коррелированы.

В главе 6 задача идеальной линейной коррекции рассмотрена при дополнительных условиях принадлежности корректирующих импульсов u_i выпуклым множествам $\mathcal{U}_i$:

$$L = \min_{u_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(u_i) : \sum_{i=1}^{n} B_i u_i = b, \quad u_i \in \mathcal{U}_i \right\}.$$

Здесь $u_i \in \mathrm{R}^{n_i}$ – векторы корректирующих импульсов, а убывающие положительные функции $p_i(u_i)$ характеризуют энергетические затраты на исполнение i-го импульса. Фактически это есть задача минимизации нормы из определенного класса при линейных ограничениях и дополнительных нелинейных условиях.

В разделе 6.1 дана постановка задачи и показана невозможность ее решения методом, используемым для задачи без ограничений на импульсы. Здесь также теория, изложенная в главе 2, развита на случай, когда целевая функция есть произвольная норма.

В разделе 6.2 задача с ограничениями сведена к обобщенной задаче линейного программирования с $m+1$ ограничениями-равенствами (m – размерность корректируемого вектора). Показано, что если импульсы ограничены по норме $p(\cdot)$, т.е. $\mathcal{U}_i = \{u_i \in \mathrm{R}^{n_i} : \quad p_i(u_i) \le c_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$, то решение подзадачи сводится к вычислению двойственной нормы $p_i^*(\cdot)$, которая для известных приложений ($p_i(x) = \|x\|$ – евклидова норма или $p_i(x) = \|x\|_1$) вычисляется по известным формулам.

В разделе 6.4 приведены численные результаты выбора оптимальной коррекции на одном витке кеплеровской орбиты спутника Земли. В качестве корректируемых параметров выбраны следующие: радиусы апогея и перигея r_a и r_π , аргумент перигея ω , наклонение i , долгота восходящего узла Ω . Возможные моменты приложения импульсов распределяются равномерно по эксцентрической аномалии, а все нормы векторов в задаче — евклидовы и ограничены одной константой c . При достаточно большом значении c количество ненулевых импульсов не превосходит числа корректируемых параметров. При уменьшении величины c количество импульсов увеличивается до тех пор, пока при некотором критическом значении этой константы задача коррекции не перестанет иметь решения из-за несовместности ограничений этой задачи. Это означает возможность проведения непрерывной коррекции с двигателем малой тяги, столь же эффективной, как и импульсная коррекция, которая моделирует коррекцию с двигателем большой тяги на малом интервале времени.

В заключении отражены основные результаты диссертационной работы.

Заключение

На защиту выносятся:

1. Теория и методы решения вырожденной и обобщенной задач линейного программирования.

2. Теория и алгоритмы решения задач L- и MV-оптимального планирования эксперимента и их применение для оптимального выбора программы лазерных наблюдений при определении геодинамических параметров Земли.

3. Аналитическое решение задачи MV-оптимального планирования эксперимента в случае полиномиальной регрессии.

4. Решение задачи робастного оценивания с линейными ограничениями на оцениваемые параметры методом генерации столбцов обобщенного линейного программирования.

5. Решение задачи минимизации нормы при линейных ограничениях для некоторых практически важных случаев методом генерации столбцов.

6. Решение задачи коррекции с ограничениями на величины импульсов методом генерации столбцов и приложение к оптимальной коррекции с малой тягой.

7. Описание и исследование множества весовых матриц метода наименьших квадратов, определяющих заданную линейную несмещенную оценку; обобщение теорем эквивалентности при наличии мешающих параметров.

Основные публикации по теме работы

1. *Бахшиян Б.Ц.* Оптимальный выбор информации, используемой при определении траектории движения космического аппарата // Косм. исследования. 1969. Т.7. N° 3. С.445-448.

2. *Бахшиян Б.Ц.* Выбор оптимальных моментов независимых траекторных измерений // Косм. исследования. 1970. Т.8. N° 1. С.3-7.

3. *Бахшиян Б.Ц.* Некоторые задачи оценки точности прогнозирования параметров траектории и алгоритмы их решения // Косм. исследования. 1974. Т.12. N° 6. С.811-818.

4. *Бахшиян Б.Ц.* Метод решения комбинаторных задач космической навигации: Препринт N° 227. М.: Ин-т космических исследований АН СССР, 1975.

5. *Бахшиян Б.Ц.* Комбинаторный метод решения задачи оптимальной коррекции траектории при ограничении на число импульсов // Косм. исследования. 1976. Т.14. N° 4. С.630-632.

6. *Бахшиян Б.Ц.* Представление весовых матриц, определяющих заданную оценку наименьших квадратов // Навигационная привязка и статистическая обработка космической информации. М.: Наука, 1983, с.81-90.

7. *Бахшиян Б.Ц.* Решение вырожденной и обобщенной задач линейного программирования на основе критериев оптимальности: Препринт N° 1265. М.: Ин-т космических исследований АН СССР, 1987.

8. *Бахшиян Б.Ц.* Гарантированные характеристики точности линейного

оценивания, их свойства и применение. Препринт N ° I332. М.: Ин-т космических исследований АН СССР, 1987.

9. *Бахшиян Б.Ц.* Симплексный алгоритм решения оптимальной задачи гарантирующего оценивания с немоделируемыми возмущениями // Косм. исследования. 1988. Т.26. N ° 1. С.127-141.

10. *Бахшиян Б.Ц.* Критерии оптимальности и алгоритмы решения вырожденной и обобщенной задач линейного программирования // Экономика и мат. методы. 1989. Т.28. N ° 2. С.314-324.

11. *Бахшиян Б.Ц.* Эффективный симплексный алгоритм для некоторых задач минимаксного оценивания. Седьмая Всесоюзная конференция "Управление в механических системах". Тезисы докладов. г.Свердловск. 1990, с.12.

12. *Бахшиян Б.Ц.* Критерий оптимальности и алгоритм решения обобщенной задачи линейного программирования. "Понтрягинские чтения-VII". Тезисы докладов. г.Воронеж. 1996, с.31.

13. *Бахшиян Б.Ц., Баюк О.А., Филимонов В.О.* Оптимальное планирование лазерных наблюдений спутников ЛАГЕОС 1, 2 //Космическая геодезия и современная геодинамика. Москва: Наука, 1996, с.205-221.

14. *Бахшиян Б.Ц., М.И.Войсковский, Ч.В.Пак.* Об оптимальной линейной идеальной коррекции при ограничениях на корректирующие импульсы // Космические исследования.1997.Т.35. N ° 4. С.387-395.

15. *Бахшиян Б.Ц., М.И.Войсковский* О решении проблемы моментов методами линейного программирования // Вестник Тамбовского Университета, 2000, Т.5. вып.4. С.412-413.

16. *Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И., Федяев К.С.* О решении вырожденных задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика, 2000. N ° 1. С.105-117.

17. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.

18. *Бахшиян Б.Ц., Соловьев В.Н.* Применение теоремы двойственности к задаче оптимального гарантирующего оценивания оценивания//Космич. исследо-

вания. 1990. Т.28. N ° 2. С.163-169.

19. *Бахшиян Б.Ц., Соловьев В.Н.* Теория и алгоритмы решения задач L- и MV-оптимального планирования эксперимента. Автоматика и телемеханика. 1998. N ° 8. С.80-96.

20. *Бахшиян Б.Ц., Суханов А.А.* Выбор оптимального состава астроизмерений для определения орбит искусственных спутников // Космические исследования. 1977. Т.15. N ° 1. С.3-7.

21. *Бахшиян Б.Ц., Суханов А.А., Эльясберг П.Е.* Априорная точность прогноза положения кометы Галлея по наземным и бортовым наблюдениям // Космические исследования. 1985. Т.23. N ° 5. С.876-885.

22.*B.Ts.Bakshian, R.R.Nazirov, P.E.Eliasberg.* Unmodeled perturbation effect on the orbit determination accurracy //Acta Astronautica. 1981. Vol.8, pp.25-29.

23. *B.Ts.Bakhshiyan, I.A.Yastrzhemsky.* Comet Halley orbit optimum determination by means of ground based astrometric observations and on board observations from the "Vega" spacecraft // Adv.Space Res. 1987. V.5. N ° 12. P.181-183.

24. *B.Ts.Bakhshiyn, O.A.Bayuk.* Optimization of the distribution of centerline the observations of the oscillatory system//Control of Oscillatios and Chaos. Proceedings of 1st International Conference. 1997. St.Peterburg. V.2. P.238-241.