



БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ  
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ  $L_2$  СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ-ЗЕМЛЯ

И.С. ИЛЬИН

ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

Институт космических исследований РАН

17 декабря 2014

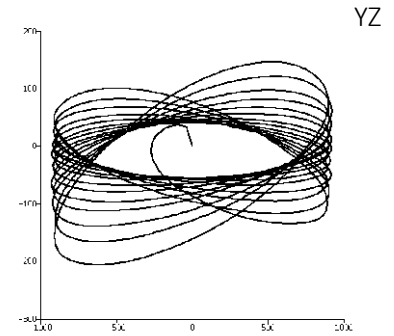
# КОСМИЧЕСКИЕ ТЕЛЕСКОПЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЛИБРАЦИОННОЙ ТОЧКИ $L_2$



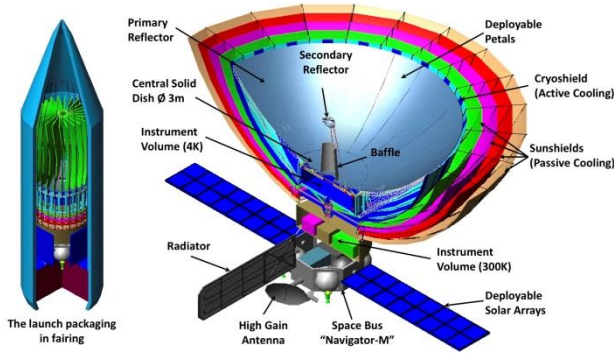
## Космический телескоп “Спектр-РГ”

**Дата старта:** запланирована на середину 2017 г  
**прямой перелёт на квазипериодическую орбиту Лиссажу** в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля

**Научные задачи:** сканирование пространства в рентгеновском и гамма диапазонах, исследование возможности навигации по рентгеновским лучам



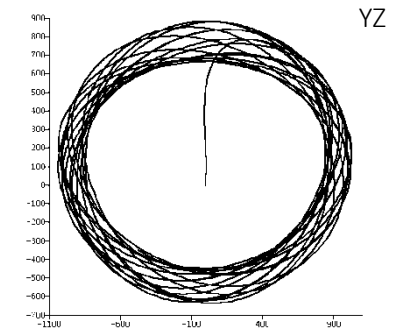
## Conceptual configuration



## Космический телескоп “Миллиметрон”

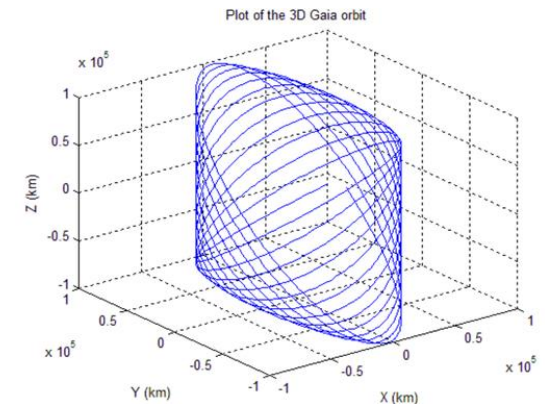
**Дата старта:** запланирована на 2019-2023 г  
**прямой перелёт на квазигало орбиту с большим выходом из плоскости эклиптики** в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля

**Научные задачи :** сканирование пространства в миллиметровом, субмиллиметровом и инфракрасном диапазонах. Двенадцатиметровое зеркало телескопа будет охлаждаться до 4K для обеспечения уникальной чувствительности.



## Космический телескоп “Гайя” ЕКА

**дата старта 19.12.13,**  
**прямой перелёт на орбиту Лиссажу** в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля



# ДИНАМИКА ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

1. Уравнения движения ограниченной круговой задачи трех тел

$$x'' - 2y' + \left( \frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) x = (1-\mu) \left( 1 - \frac{1}{r_1^3} \right)$$

$$y'' + 2x' + \left( \frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) y = 0$$

$$z'' + \left( \frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} \right) z = 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tau = n_0 t$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

2. Линеаризация уравнений движения задачи трех тел в окрестности точки  $L_2$  и собственные значения матрицы системы

$$\Delta x'' - 2y' - (2a+1)\Delta x = 0$$

$$y'' + 2\Delta x' + (a-1)y = 0$$

$$z'' + az = 0$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$a = \frac{\mu}{x_0^3} + \frac{1-\mu}{(1+x_0)^3}$$

$$\lambda_{xy}^4 - \lambda_{xy}^2(a-2) - (2a+1)(a-1) = 0$$

$$\lambda_z^2 + a = 0$$

$$\lambda_{xy} = \pm \lambda, \pm i\omega_1, \text{ где } \lambda > 0, \omega_1 > 0,$$

$$\lambda_z = \pm i\omega_2, \text{ где } \omega_2 > 0$$

3. Согласно теории устойчивости Ляпунова, в линейном приближении точка либрации  $L_2$  является особой точкой типа **центр**  $\times$  **центр**  $\times$  **седло**.

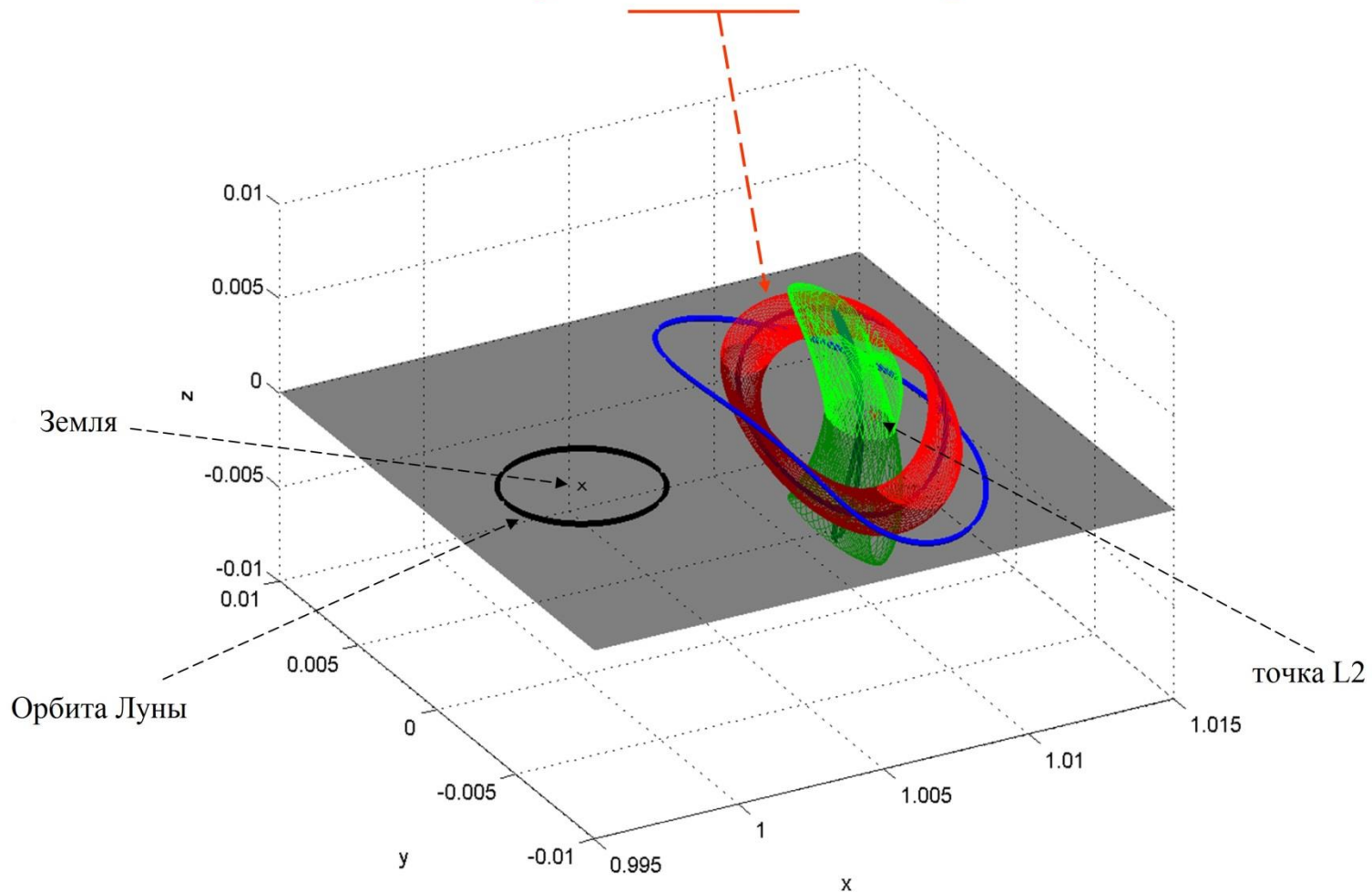
$$\pm i\omega_1$$

$$\pm i\omega_2$$

$$\pm \lambda$$

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $L_2$

## Квазипериодическая гало-орбита



# МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПЕРИОДИЧЕСКИХ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

Решение системы линеаризованных уравнений, описывающих динамику ограниченной круговой задачи трёх тел в окрестности точки  $L_2$

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t} \\y &= -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t}) \\z &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\end{aligned}$$

Собственные векторы:

$$\begin{aligned}w_1 &= C \begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \\w_2 &= D \begin{pmatrix} 1 \\ -k_1 \end{pmatrix} e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Сведение гамильтониана ограниченной круговой задачи трёх тел

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x p_y + y p_x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

к нормальной форме (сведение к центральному многообразию)

$$H(q, p) = i\omega_1 q_1 p_1 + i\omega_2 q_2 p_2 + \lambda q_3 p_3 + \sum_{n \geq 3} H_n(q, p)$$

Метод Линдштедта-Пуанкаре

линейная часть решения:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\y(t) &= kA \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\z(t) &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

нелинейные члены:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left( \sum_{|k| \leq i, |m| \leq j} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{ijkm} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (k\theta_1 + m\theta_2) \right) \alpha^i \beta^j$$

необходимо рекуррентно рассчитать

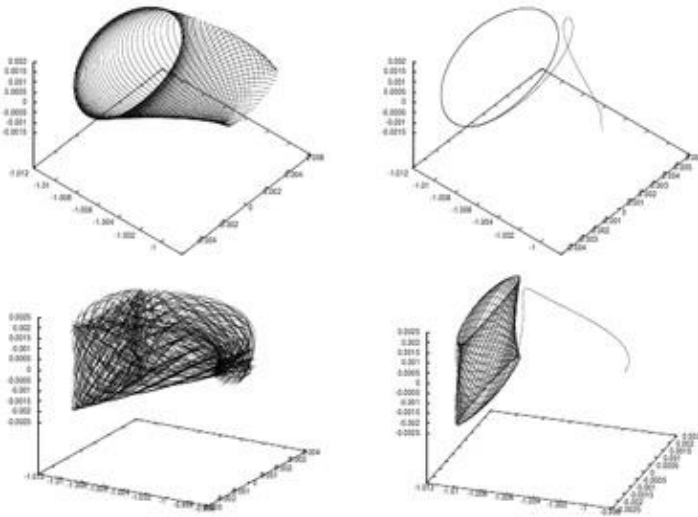
$$x_{ijkm}, y_{ijkm}, z_{ijkm}, \omega_{ij}, \nu_{ij} \quad \text{до} \quad N = i + j$$

где

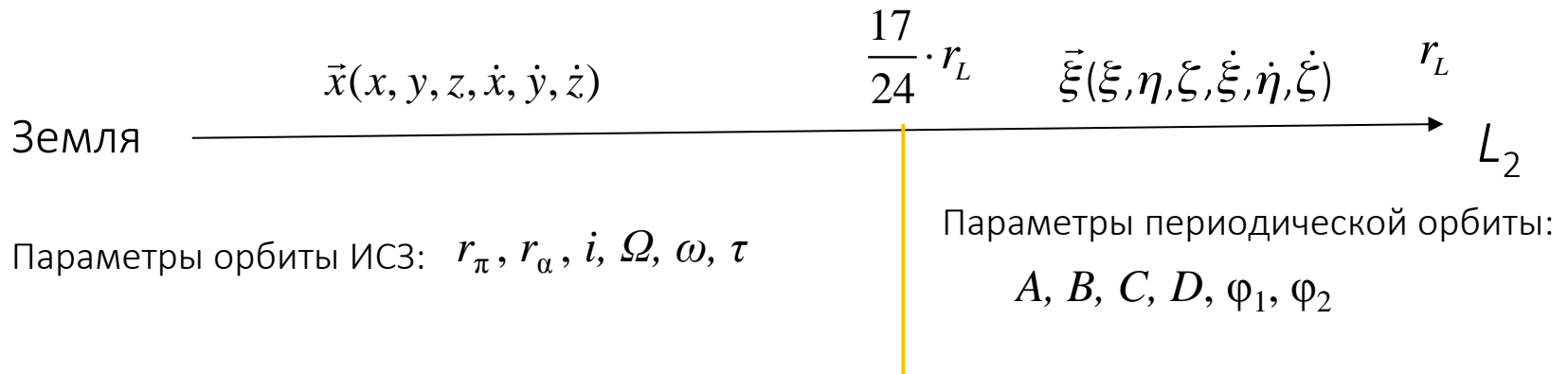
$$\begin{aligned}\theta_1 &= \omega t + \varphi_1 \\ \theta_2 &= \nu t + \varphi_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \omega_{ij} \alpha^i \beta^j \\ \nu &= \omega_2 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \nu_{ij} \alpha^i \beta^j\end{aligned}$$

# ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИЗОЛИНИЙ



Траектория перелёта на выбранную периодическую орбиту ищется на устойчивом инвариантном многообразии задачи трех тел с помощью варианта метода продолжения по параметру, впервые предложенного М.Л. Лидовым. Этот метод позволяет связать параметры периодической орбиты с параметрами геоцентрической перелётной траектории – строятся изолинии функции высоты перицентра от параметров периодического решения. Метод позволяет осуществить одноимпульсный переход на периодическую орбиту.



Одноимпульсные траектории перелёта выделяются условием:  $r_\pi = r_\pi^*$

При фиксированных  $A, B$  и  $C = 0$  изолиния строится в плоскости  $\phi_1, \phi_2$ :  $r_\pi(\phi_1, \phi_2) = r_\pi^*$

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИЗОЛИНИИ

1. Поиск функции высоты перицентра  $f(\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2)$  согласно следующему алгоритму:

- Вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени в зависимости от параметров:  $A, B, \varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

$$D = r_L + x_1^* - A \cos \varphi_1$$

$$\xi_1 = r_L + x_1^*$$

$$\xi_2 = -k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D$$

$$\xi_3 = B \cos \varphi_2$$

$$\dot{\xi}_1 = -\omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D$$

$$\dot{\xi}_2 = -k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D$$

$$\dot{\xi}_3 = -\omega_2 B \sin \varphi_2$$

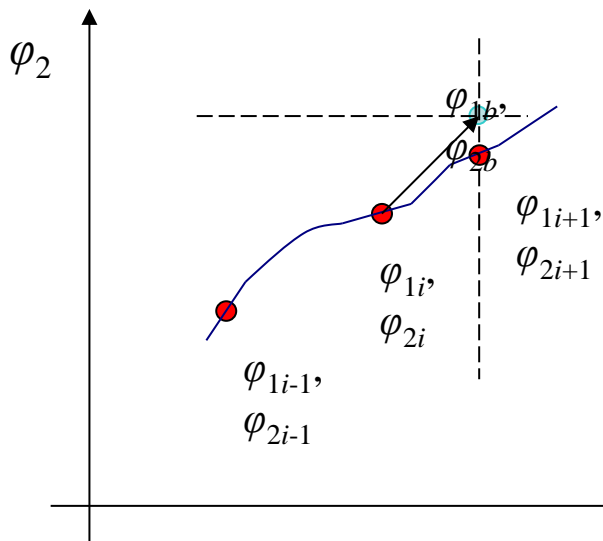
- Полученный вектор преобразуется в невращающуюся геоцентрическую эллиптическую СК
- По полученному вектору вычисляются элементы орбиты и в том числе расстояние перицентра  $r_\pi$

2. Поиск начальной точки изолинии – выполняется сканированием по  $\varphi_1, \varphi_2$

$$(r_\pi(\varphi_1 - 1^\circ, \varphi_2) - r_\pi^*) \cdot (r_\pi(\varphi_1, \varphi_2) - r_\pi^*) \leq 0$$

$$\text{Уточнение: } |r_\pi(\varphi_{1m}, \varphi_2) - r_\pi^*| < \varepsilon$$

3. Поиск следующей точки изолинии – выполняется смещение на шаг  $s$ , затем координаты  $\varphi_{1i+1}, \varphi_{2i+1}$  уточняются



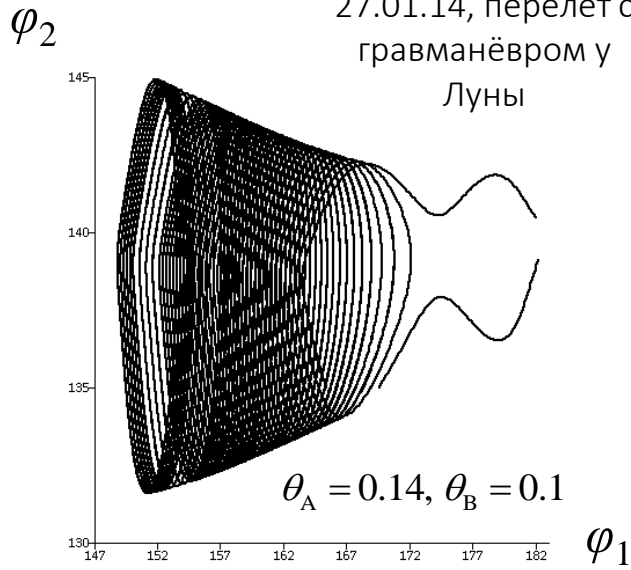
$$s = \begin{cases} h, & \text{если } i = 1; \\ \frac{h}{\sqrt{(\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1})^2 + (\varphi_{2i} - \varphi_{2i-1})^2}}, & \text{если } i > 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{1b} = \varphi_{1i} + s,$$

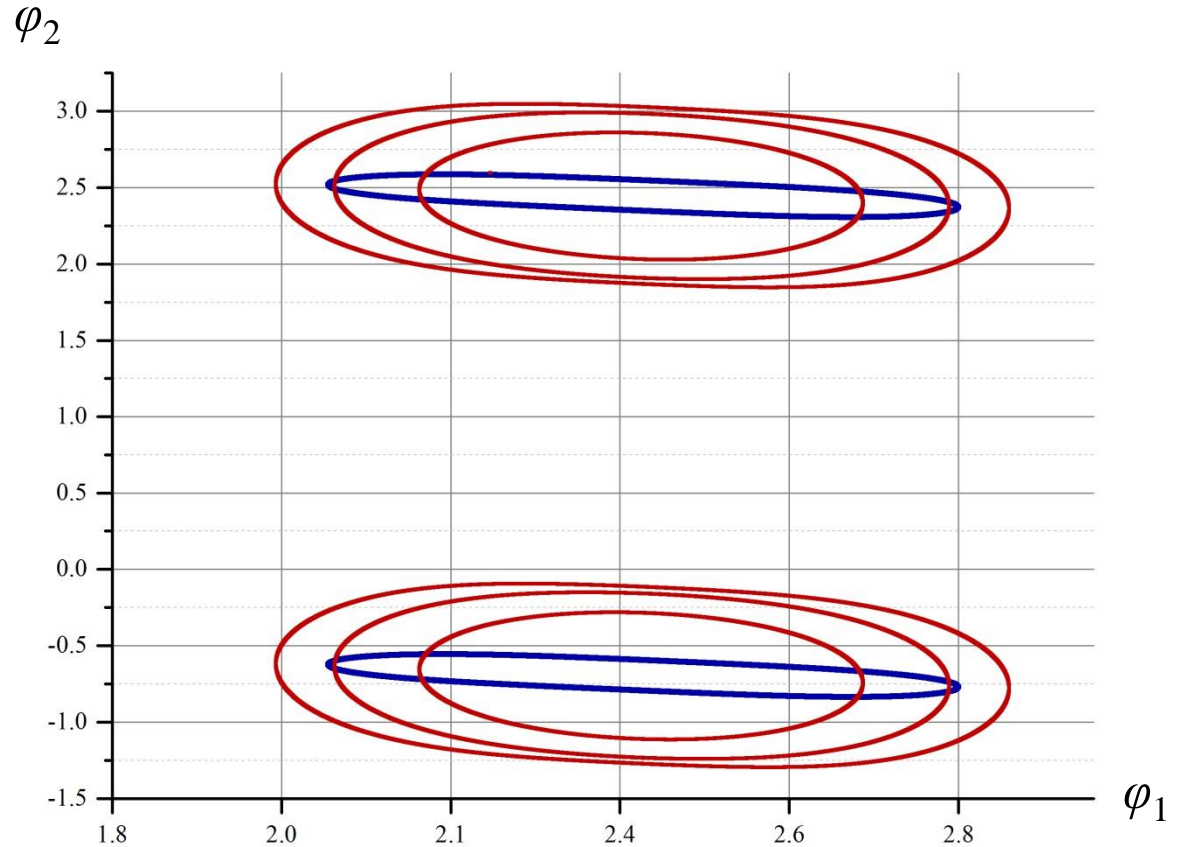
$$\varphi_{2b} = \varphi_{2i} + s,$$

# ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕННЫХ ИЗОЛИНИЙ

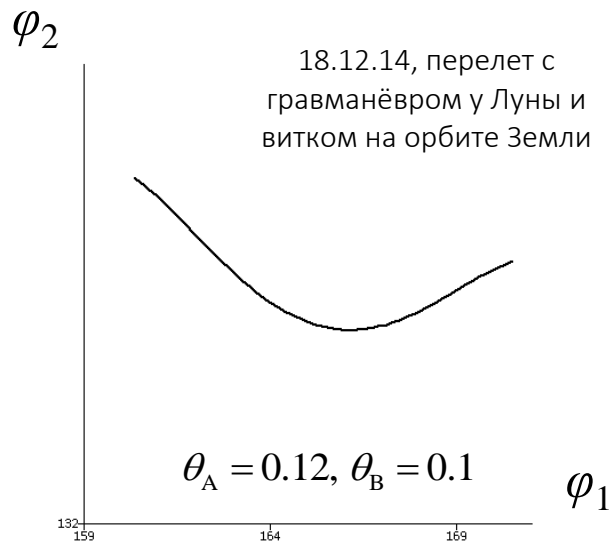
27.01.14, перелет с гравманёвром у Луны



Изолинии для перелета без гравитационного манёвра у Луны, Спектр-РГ и Миллиметрон



18.12.14, перелет с гравманёвром у Луны и витком на орбите Земли



$\theta_A = 0.18, \theta_B = 0.1524$

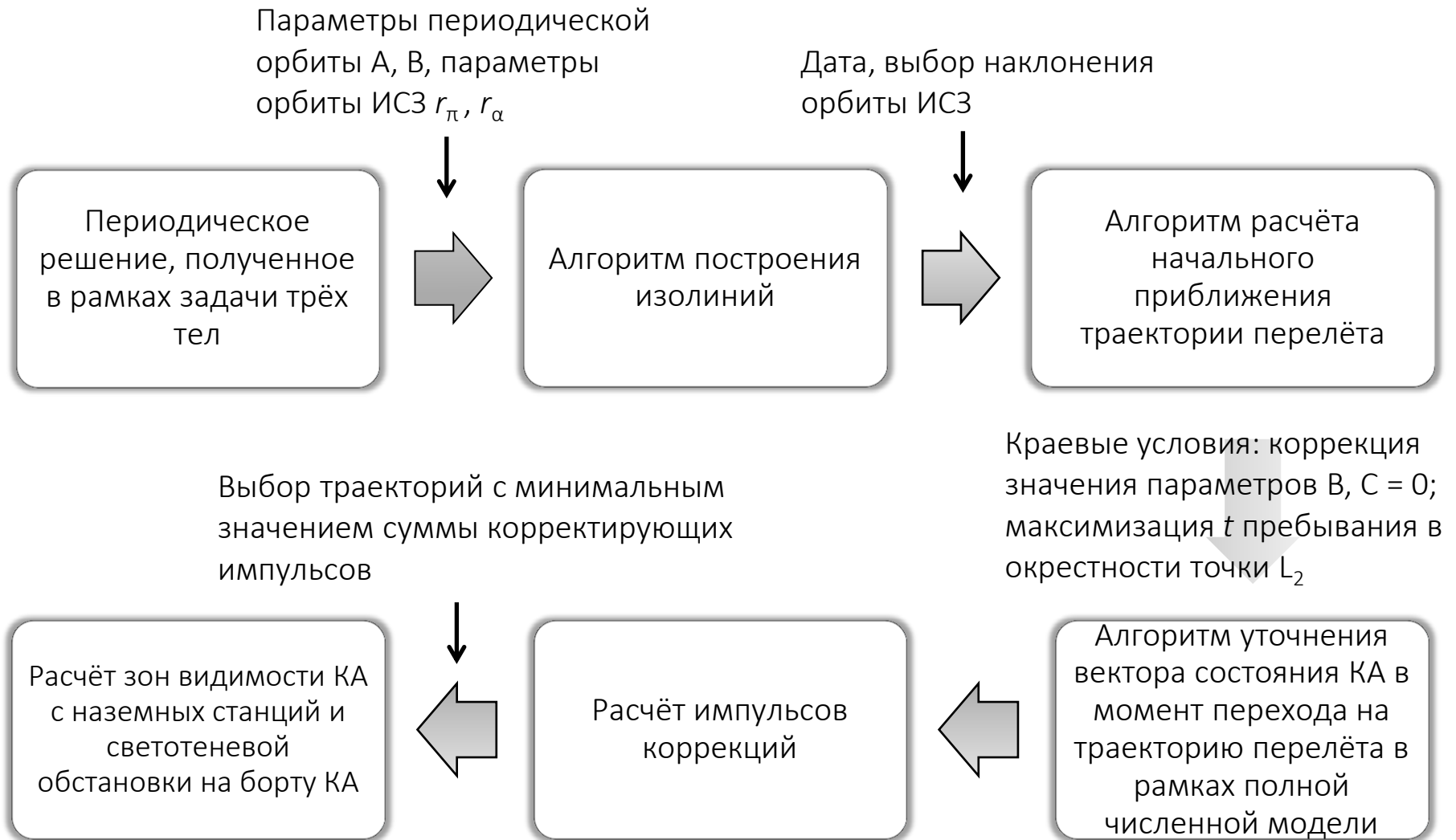
$\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.850$

$\theta_A = 0.19, \theta_B = 0.1538$

$\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.1552$



# СТРУКТУРА АЛГОРИТМА РАСЧЁТА ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА НА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКУЮ ОРБИТУ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $L_2$



# РАСЧЁТ ИМПУЛЬСОВ КОРРЕКЦИЙ

Вектор импульса коррекции рассчитывается из условия максимального времени нахождения КА в окрестности точки  $L_2$  заданного радиуса после исполнения коррекции. Максимум времени ищется с помощью градиентного метода.

$$\Delta \vec{V}_i = \frac{1}{2^q} \frac{\Delta V_{\max}}{|\nabla F_c|} (\nabla F_c)^T$$

$\Delta V_{\max}$  - Наибольшее возможное значение импульса;

$$R(\theta_A, \theta_B) = r_L \cdot \sqrt{\theta_B^2 + (1 + k_2^2) \theta_A^2}$$

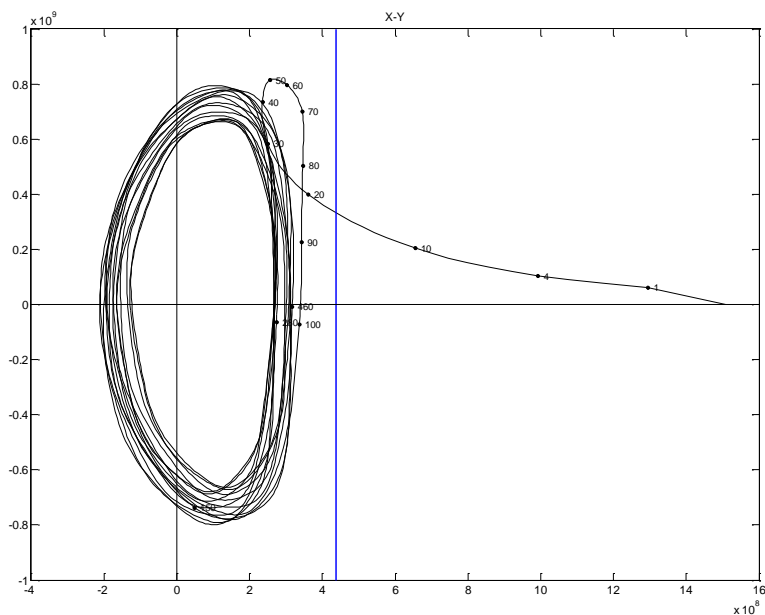
$q$  – коэффициент, контролирующий сокращение шага.

$$F_c = \begin{cases} t_{\text{outL2}} - t_{\text{inL2}} \\ \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \left( (B(t) - \theta_B r_L)^2 + C(t)^2 \right) dt \end{cases}$$

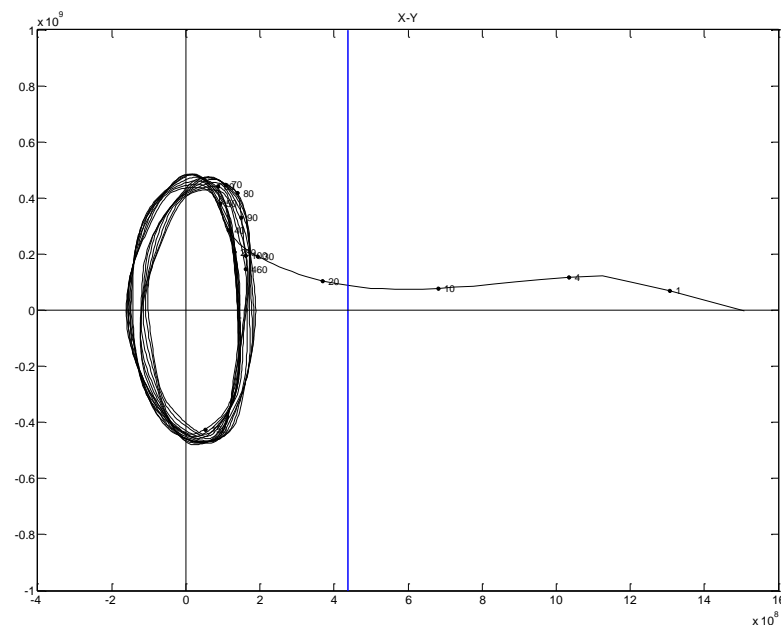
# МЕТОД ИЗОЛИНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА С ГРАВИТАЦИОННЫМ МАНЕВРОМ У ЛУНЫ

**Преимущества:** Гравитационный маневр у Луны позволяет выйти на более компактную орбиту

**Недостатки:** Перелёт возможен 1 раз в месяц, исправление ошибок исполнения гравитационного манёвра может потребовать больших затрат характеристической скорости



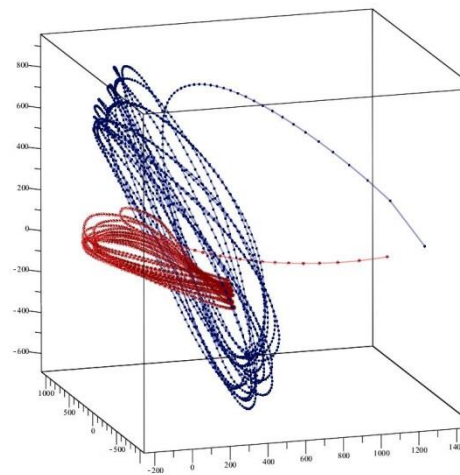
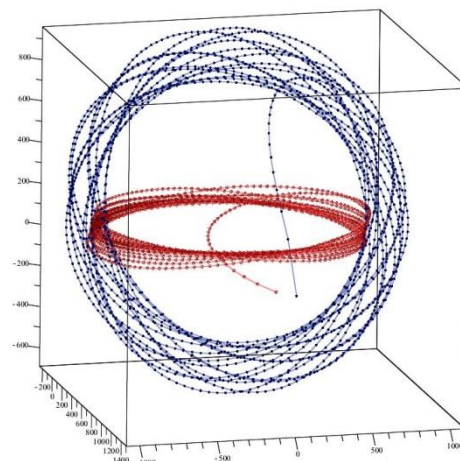
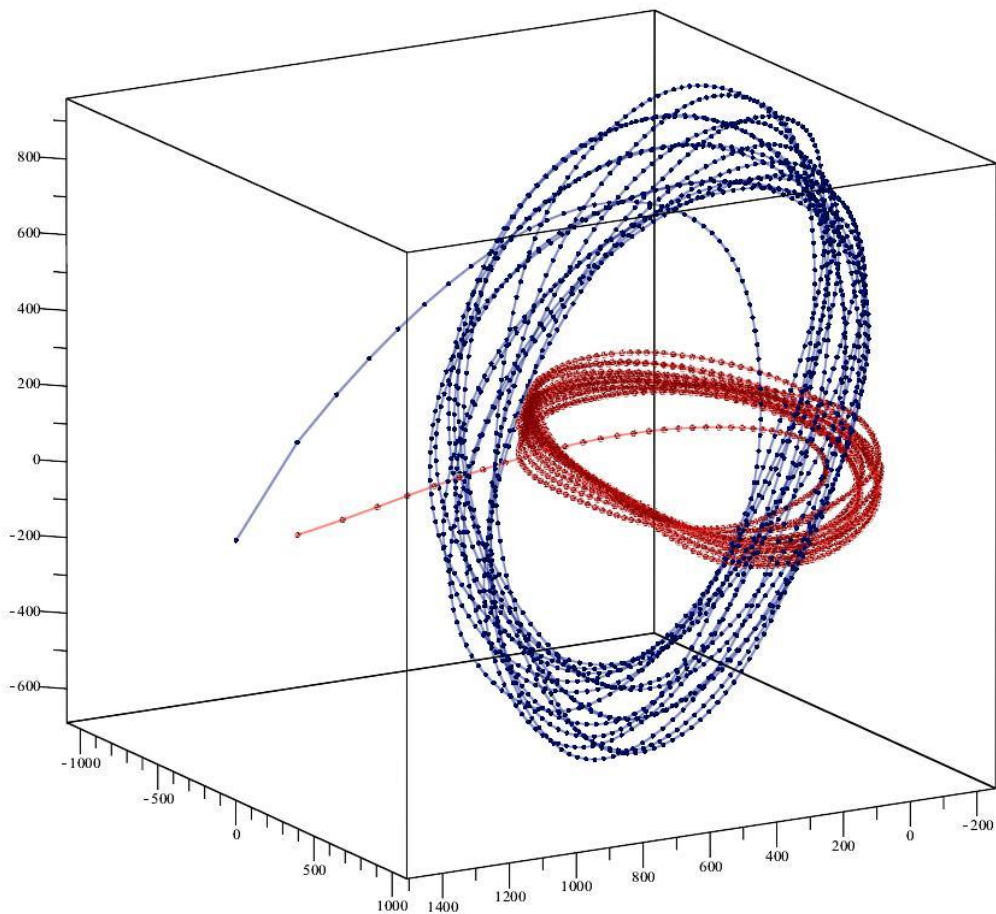
Квазипериодическая орбита, переход на которую осуществлен без гравитационного манёвра у Луны  
 $\Delta y = 0.8$  млн км



Квазипериодическая орбита, переход на которую осуществлен с гравитационным манёвром у Луны  
 $\Delta y = 0.5$  млн км

Проекция орбиты на плоскость XY вращающейся СК, млн км.

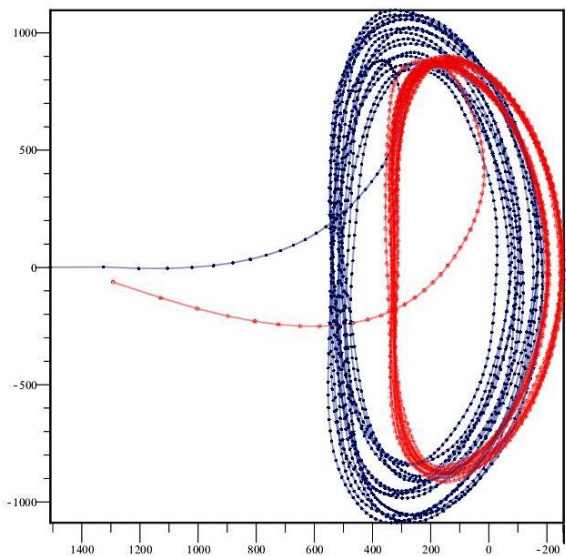
# КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ, РАССЧИТАННЫЕ ДЛЯ МИССИЙ «СПЕКТР-РГ» И «МИЛЛИМЕТРОН»



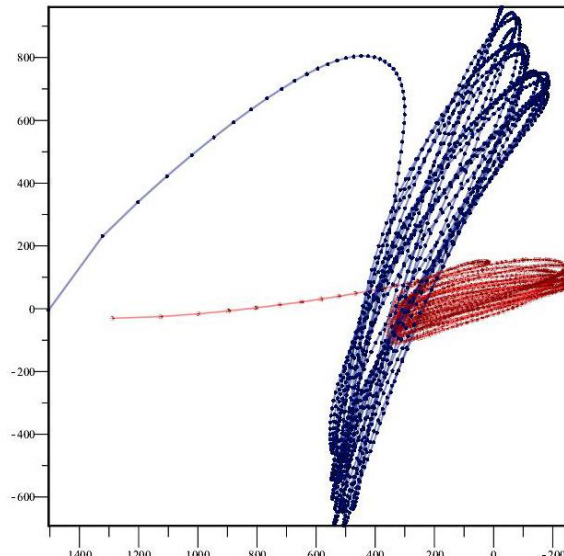
Суммарные затраты характеристической скорости составляют менее 15 м/с за 7 лет.

# КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ, РАССЧИТАННЫЕ ДЛЯ МИССИЙ «СПЕКТР-РГ» И «МИЛЛИМЕТРОН»

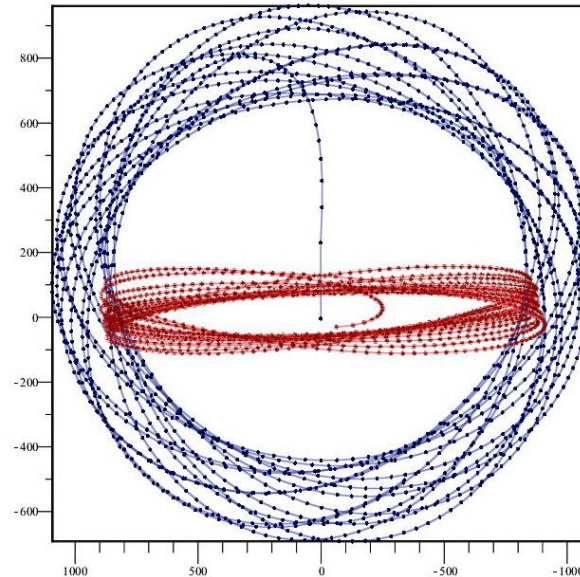
1000



1000



1000



-1000

-200

-600

-200

-600

-1000

Проекции на плоскости XY, XZ и YZ вращающейся СК с центром в точке  $L_2$

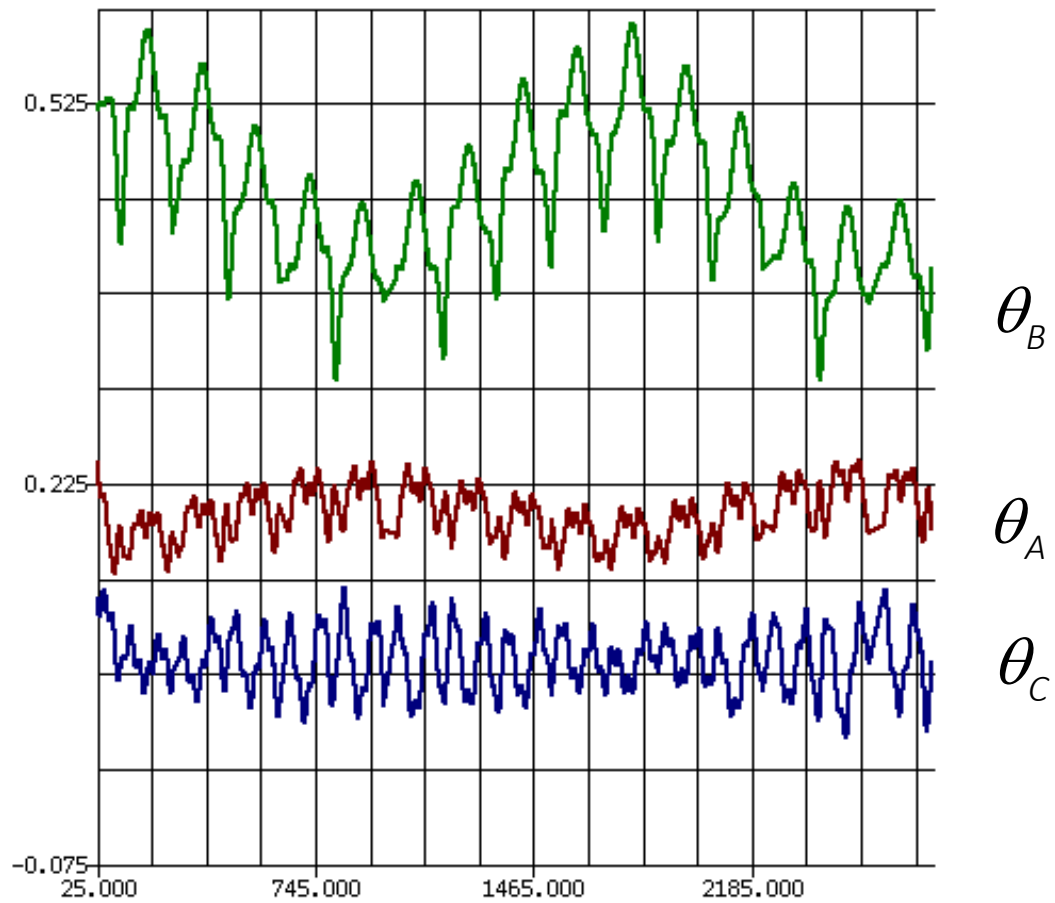
Размерность: тысячи км

# ЭВОЛЮЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

$$\theta_A = \frac{A}{R_L}$$

$$\theta_B = \frac{B}{R_L}$$

$$\theta_C = \frac{C}{R_L}$$



$t$ , сутки

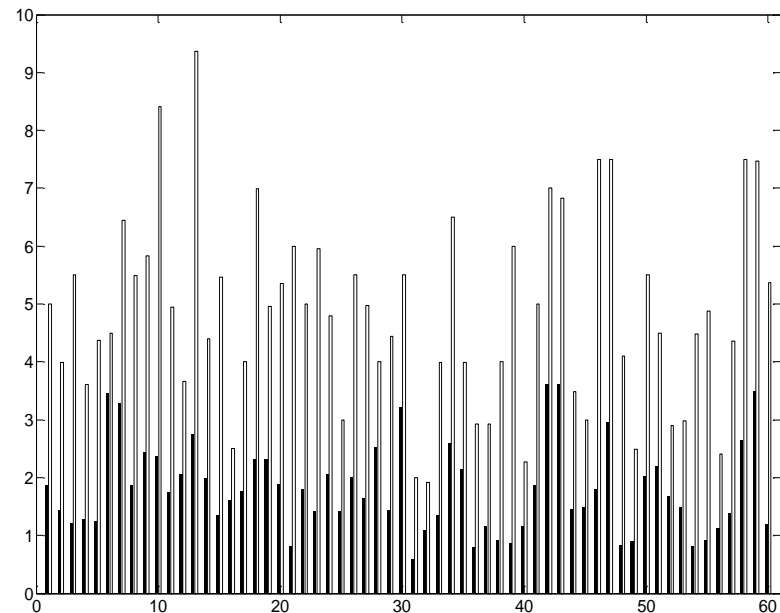
# ОЦЕНКА ЗАТРАТ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ НА КОРРЕКЦИИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Миссия	Спектр-РГ		Спектр-М	
	Средн, м/с	Макс, м/с	Средн, м/с	Макс, м/с
Манёвр				
1 <sup>ый</sup> МКТП	32.7	49.5	22.2	43.8
2 <sup>ой</sup> МКТП	11.0	37.4	3.3	13.5
3 <sup>ий</sup> МКТП	1.8	6.5	0.4	1.6
4 <sup>ый</sup> МКТП	1.7	14.2	1.4	3.0
Коррекции поддержания орбиты	35.0	124.0	43.0	173.0
Суммарные затраты $\Delta V$	82.2	231.6	70.3	234.9

Ошибки выведения	
Ракета-носитель	Зенит-2СБ
Разгонный блок	Фрегат-СБ
Высота апоцентра	$\pm 120000$ км
Высота перигея	$\pm 12$ км
Аргумент перигея	$\pm 24'$
Долгота восходящего узла	$\pm 10'$
Наклонение	$\pm 5'$

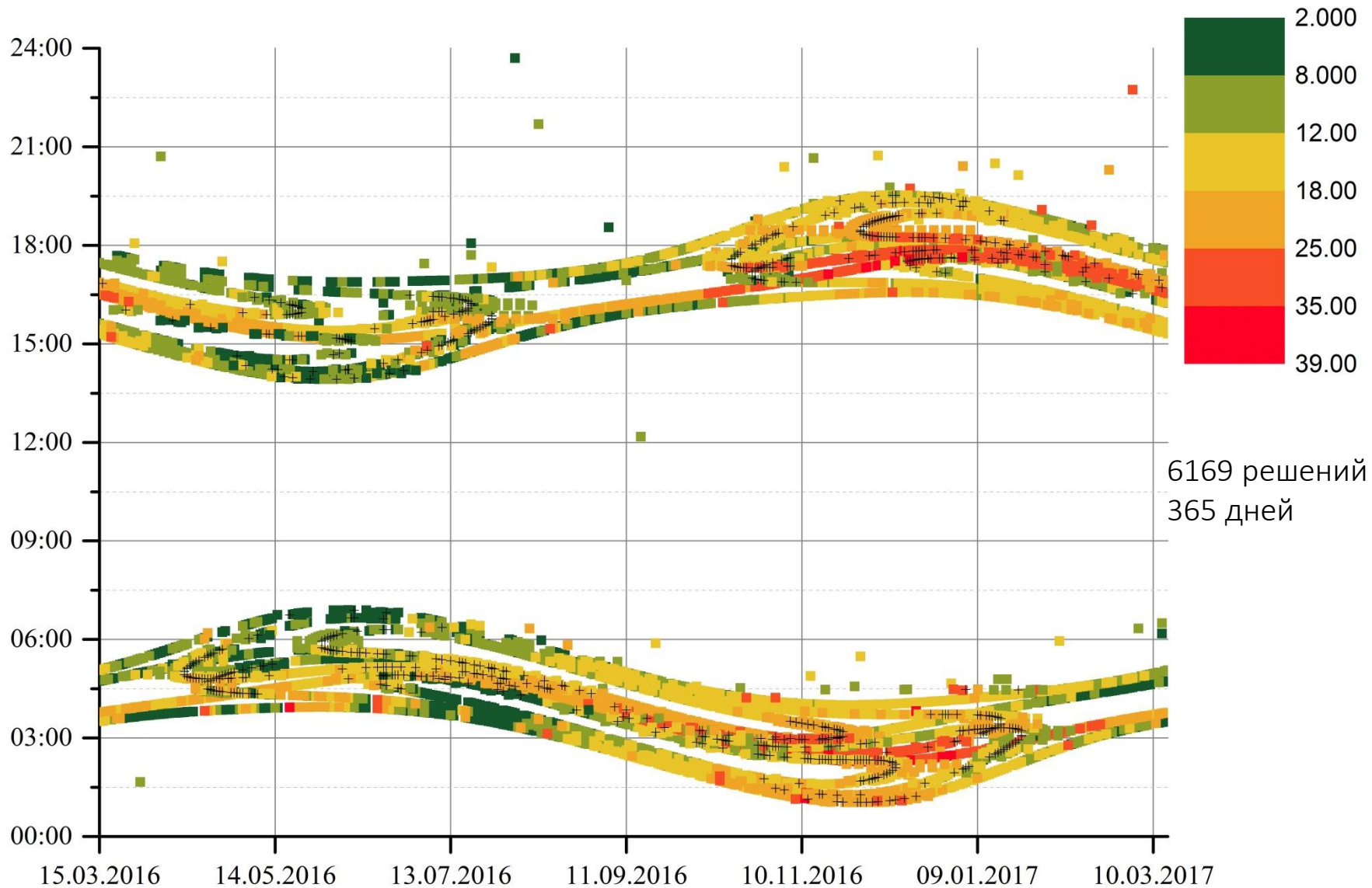
Ошибки исполнения	
По модулю	10%
По направлению	$0.5^\circ$

$\Delta V$ , м/с



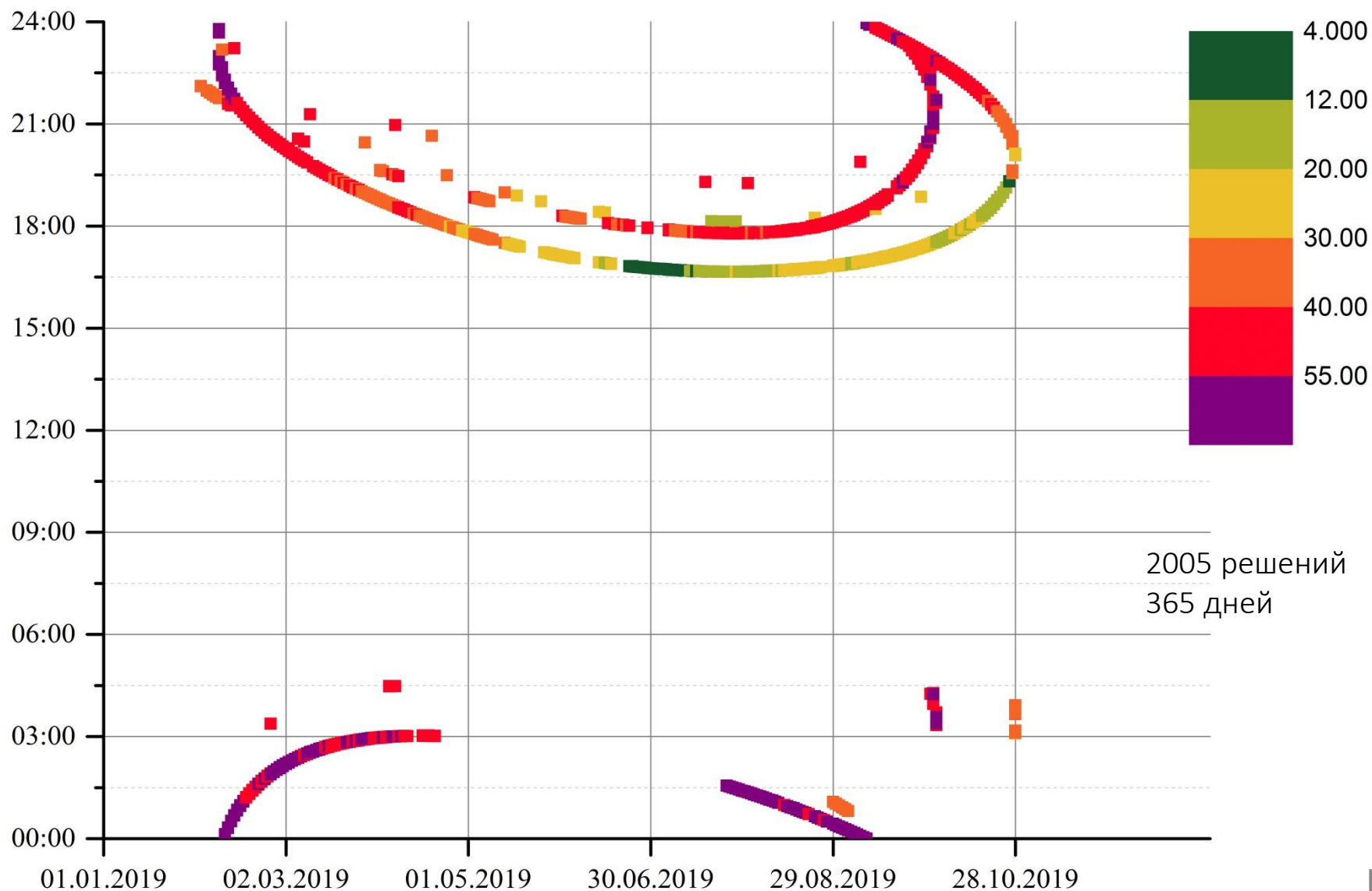
$N_{imp}$

# КАРТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИССИИ «СПЕКТР-РГ»

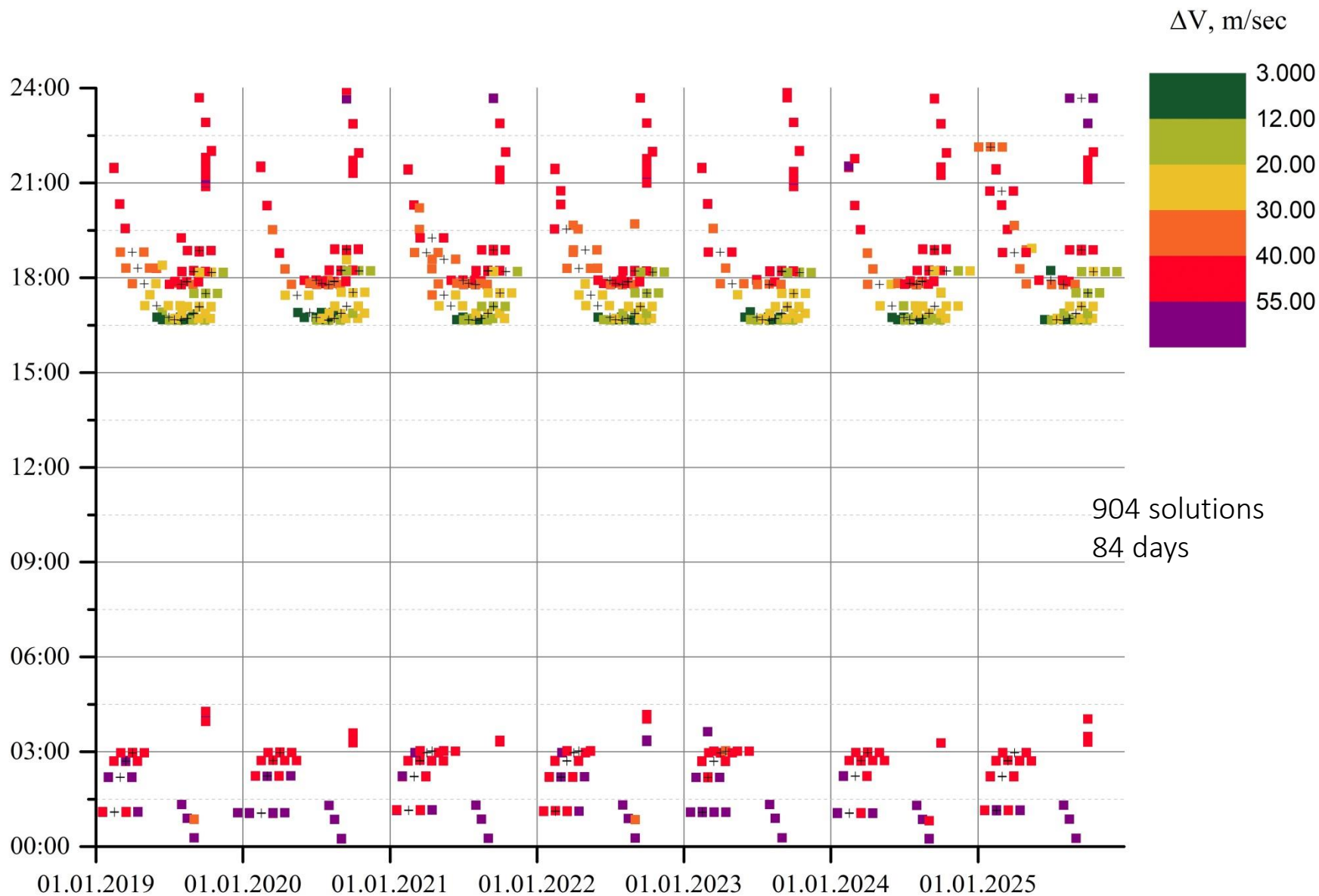




# КАРТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИССИИ «МИЛЛИМЕТРОН» НА 2019 ГОД



# КАРТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИССИИ «МИЛЛИМЕТРОН» НА 2019-2025 ГОДЫ



# РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Разработаны методы решения следующих задач:

- расчёт траекторий перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля с заданными геометрическими характеристиками, с учётом возмущений от нецентральной поля Земли, гравитационного воздействия Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а так же давления солнечной радиации;
- расчёт маневров, реализующих эффективный сценарий удержания космического аппарата на выбранной квазипериодической орбите;
- поиск начального приближения для траектории перелёта на выбранный класс квазипериодических орбит на устойчивом многообразии коллинеарной либрационной точки  $L_2$ . Этот метод опирается на вариант метода продолжения по параметру, предложенный М.Л. Лидовым, и метод Линдштедта-Пуанкаре построения периодических орбит;
- построение траекторий перелёта, включающих гравитационный манёвр у Луны, позволяющий совершить одноимпульсный переход на квазипериодические орбиты малой амплитуды. Метод продолжения по параметру удалось распространить на класс траекторий перелёта с гравитационным манёвром.

Предложенные методы и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, используемого в баллистико-навигационном обеспечении проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», предполагающих размещение космического аппарата на квазипериодических орбитах в окрестности точки  $L_2$  системы Солнце-Земля. Расчёт траекторий космического аппарата выполняется в рамках эфемеридной модели Солнечной системы, учитывающей нецентральность поля Земли, гравитационное воздействие Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а так же давление солнечной радиации.

С помощью программного комплекса:

- рассчитано множество квазипериодических орбит, имеющих большую амплитуду в направлении, ортогональном плоскости эклиптики, отвечающее требованиям проекта «Миллиметрон»;
- построены карты множеств полученных решений, позволившие установить структуру временного и энергетического распределения траекторий перехода на квазипериодические орбиты различных типов и определить оптимальные окна старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»