Перенос пассивного скаляра в пристенной области случайного потока

В. Лебедев[1]   А. Черных[2]

[1]Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

[2]Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
Новосибирский государственный университет

8 февраля 2009 г.

- Что такое пассивный скаляр? Его движение описывается уравнением

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta \,,$$

θ — температура или концентрация примеси
$\mathbf{v}$ — турбулентное поле скорости

- Что такое пристенная область?
Это вязкий подслой, в котором

$$v_{x,y} \propto z, \quad v_z \propto z^2$$

z — расстояние до плоской стенки,
x, y — координаты вдоль нее

Теория статистических свойств скаляра построена в работе: *V. V. Lebedev and K. S. Turitsyn, Passive scalar evolution in peripheral regions, Phys. Rev. E***69***, 036301 (2004)*

Основные предположения.

- Жидкость несжимаема: $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$
- Поле скорости коротко коррелировано по времени и гладкое в пространстве

$$v_z(t, x, y, z) = \xi(t, x, y) z^2$$

$$\langle \xi(t_1, x, y) \xi(t_2, x, y) \rangle = 2\mu\delta(t_1 - t_2)$$

μ характеризует интенсивность турбулентности,
ξ гладкая функция координат x, y

- Число Прандтля или Шмидта $\nu/\kappa \gg 1$

В этих приближениях для средней концентрации скаляра получено уравнение

$$\partial_t \langle\theta\rangle = \partial_z \left[\mu z^4 \partial_z \langle\theta\rangle\right] + \kappa \partial_z^2 \langle\theta\rangle \,,$$

Из него видно, что есть характерный масштаб

$$r_{bl} = (\kappa/\mu)^{1/4}.$$

Граничная задача

$$\theta(x, y, z = 0) = \theta_0, \quad \theta(x, y, \infty) = 0$$

Внутри вязкого подслоя есть диффузионный подслой толщины r_{bl}. Вне него диффузионное слагаемое пренебрежимо и

$$\langle\theta\rangle \propto z^{-3}$$

Если в уравнениях для высших моментов $\langle\theta^n\rangle$ пренебречь диффузионным слагаемым, то аналогично получается

$$\langle\theta^n\rangle \propto z^{-3}$$

Поле скорости двумерной задачи

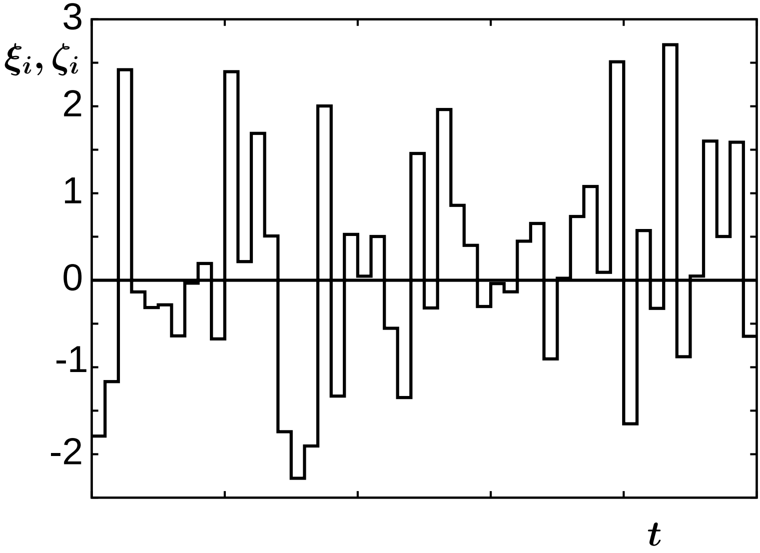
$$v_x = z\left(\xi_1 \cos\frac{2\pi x}{L} + \xi_2 \sin\frac{2\pi x}{L}\right)\frac{L}{\pi}\,, \tag{1}$$

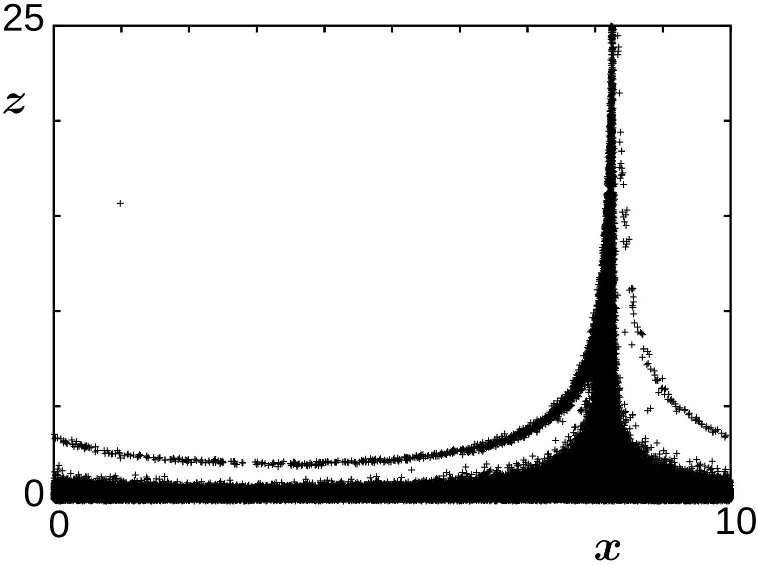
$$v_z = z^2\left(\xi_1 \sin\frac{2\pi x}{L} - \xi_2 \cos\frac{2\pi x}{L}\right)\,. \tag{2}$$

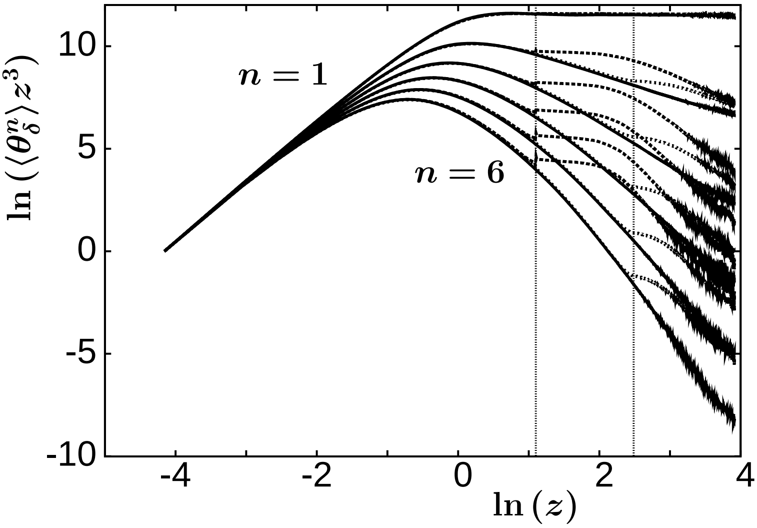
Уравнение движения Лагранжевой частицы

$$\partial_t \boldsymbol{\varrho} = \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\varrho}) + \boldsymbol{\zeta}(t), \tag{3}$$

В численнм моделировании ξ_i, ζ_i — телеграфные процессы, время корреляции которых равно длине ступеньки τ. При $\langle\xi_i^2\rangle = \langle\zeta_i^2\rangle = 1$ получим $\mu = \tau/2$, $\kappa = \tau/2$ и $r_{bl} = 1$.


3
ξ_i, ζ_i
2
1
0
-1
-2
t


25
z
0
0
10
x



$n=1$
$n=6$
10
5
0
-5
-10
-4
-2
0
2
4
$\ln\left(\langle\theta_\delta^n\rangle z^3\right)$
$\ln(z)$

Более грубая характеристика, нечувствительная к поперечной диффузии

$$\Theta(t,z) = \int dx\ dy\ \theta(t,x,y,z)\,.$$

Для $\Theta(t,z)$, в пренебрежении корреляцией скаляра вдоль плоскости (x,y) и вне диффузионного подслоя, получено уравнение

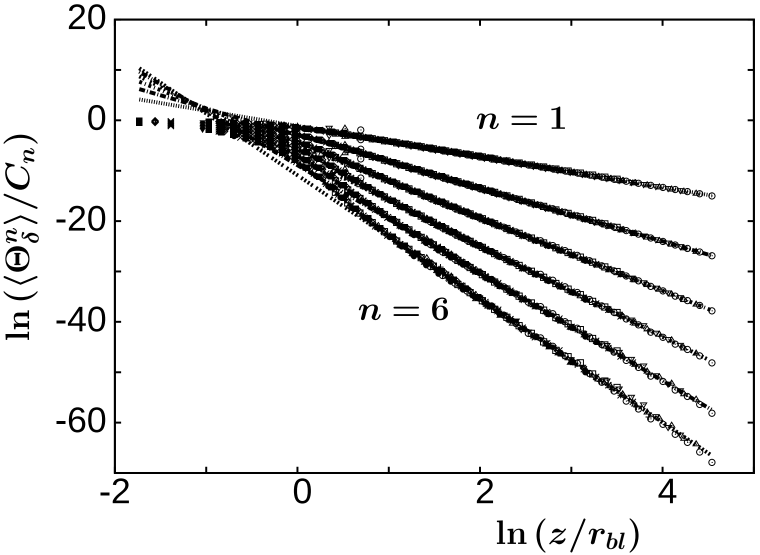
$$\partial_t \langle \Theta^n \rangle = \mu \left[z^4 \partial_z^2 + 4nz^3 \partial_z + 4n(n-1)z^2 \right] \langle \Theta^n \rangle\,. \tag{4}$$

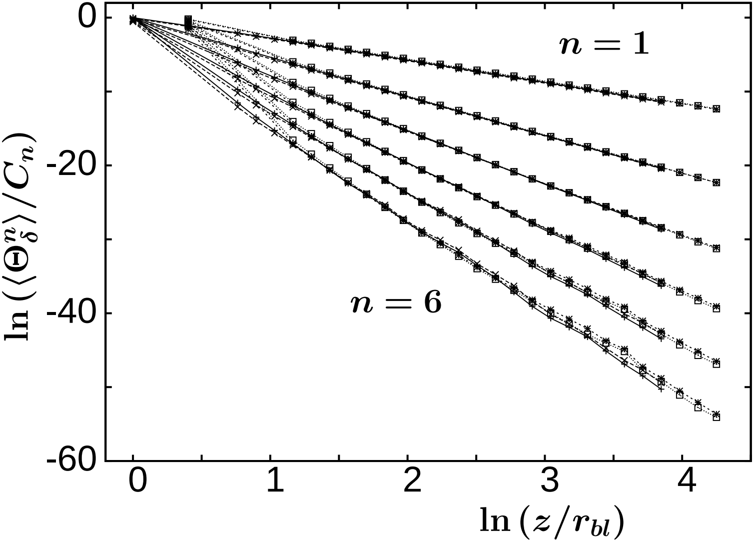
Оно имеет стационарное решение

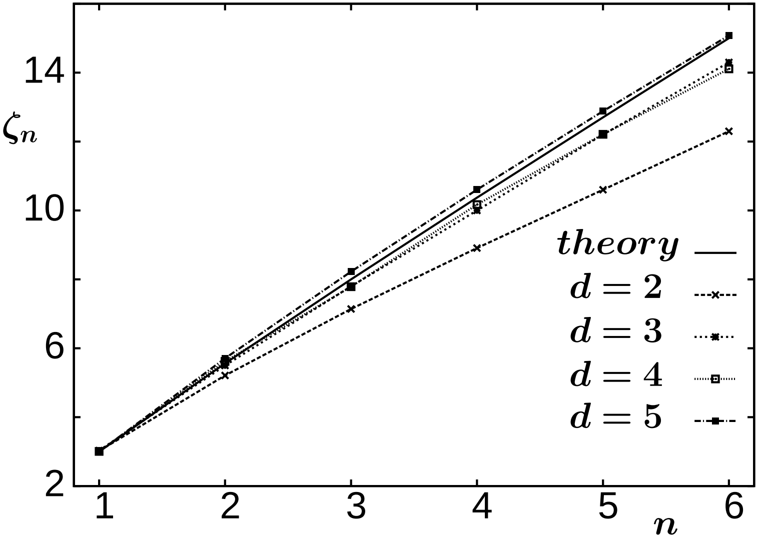
$$\langle \Theta^n \rangle \propto z^{-\zeta_n}\,. \tag{5}$$

где

$$\zeta_n = 2n - 1/2 + \sqrt{2n + 1/4}\,. \tag{6}$$


20
0
-20
-40
-60
-2
0
2
4
$\ln\left(\langle\Theta_\delta^n\rangle/C_n\right)$
$\ln\left(z/r_{bl}\right)$
$n=1$
$n=6$


$n = 1$
$n = 6$
$\ln \left(\langle \Theta_\delta^n \rangle / C_n \right)$
$\ln \left(z / r_{bl} \right)$
0
-20
-40
-60
0
1
2
3
4



ζ_n
14
10
6
2
1
2
3
4
5
6
n
$theory$
$d = 2$
$d = 3$
$d = 4$
$d = 5$

- Диффузия существенно уменьшает моменты пассивного скаляра вне диффузионного подслоя
- Численно определенные показатели в степенной зависимости моментов усредненного скаляра от расстояния до стенки, при размерности пространства больше 2, хорошо согласуются с аналитическими. В размерности 2 скоррелированность скаляра вдоль стенки заметно уменьшает численные степени по сравнению с аналитическими.